

Exercícios de Biomatemática

Oscilações em equações autônomas

1. É possível formular um modelo do tipo $\frac{dN}{dt} = f(N)$ que tenha soluções oscilatórias? Explique.

Gerenciamento de recursos pesqueiros

2. Nosso problema é construir e analisar um modelo simples que permita prever o quanto podemos pescar de uma população natural de peixes de forma a não extinguir a população, mas maximizar a quantidade de pesca.

Vamos começar usando um modelo simples para uma população, o modelo logístico, e adicionar a ele um termo de retirada devido à pesca. Se o esforço de pesca (E), relacionado ao tempo total de pesca, for constante, espera-se que o número de peixes pescados aumente à medida que a população aumente; se a população for pequena, o mesmo esforço de pesca renderá poucos peixes. Logo, o termo de pesca no nosso modelo deve ser proporcional à população N :

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - EN$$

A quantidade que queremos maximizar é a quantidade de peixes pescados por unidade de tempo, EN . Note que, inicialmente, quanto maior E , maior a pesca, mas se $E > r$, a população vai rapidamente à extinção. Logo, queremos encontrar um valor de pesca *sustentável*, ou seja, que pode ser mantido constante ao longo do tempo, o que nos leva a procurar soluções de equilíbrio.

Analise o modelo acima, encontrando seus pontos fixos e estabilidade, e determine o valor de E que maximiza a quantidade de pesca sustentável para essa população.

3. O problema acima se torna um pouco mais complicado quando a população exibe o chamado *efeito Allee*, ou efeito de pequenas populações, em que a população vai à extinção se sua população inicial estiver abaixo de um limiar. O modelo mais simples que captura esse efeito é o seguinte:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \left(\frac{N - a}{K}\right),$$

onde a é o limiar abaixo do qual a população decresce. Modifique esse modelo para incorporar o efeito da pesca e faça a mesma análise anterior. Faça um esboço dos pontos fixos (estáveis e também instáveis) em função de E . Qual o valor de E que maximiza a pesca de forma sustentável? Na prática, você consideraria razoável gerenciar a pesca tomando esse valor de E como objetivo? Considere que agora o modelo tem biestabilidade, e a população pode ir à extinção se passar abaixo de um limiar.