



Umalca
Unión Matemática
de América Latina
y el Caribe

Escola Latino- Americana de Matemática

27 de Agosto até 06 de Setembro de 2018

CMCC - UFABC - Santo André

Tecnologia e Matemática: uma inter-relação gerando Arte

Equipe:

- Profa Dra Emília M. Rosa Marques
Departamento de Matemática
- Prof. Dr. Aguinaldo R. de Souza
Departamento de Química
- Prof. Dr. Euro Marques Júnior
Departamento de Engenharia de Produção
- Doutorando Rodrigo Dantas de Luca
Pós-Graduação em Ensino de Ciências
- Alunos de Matemática: Marcelo, Micaeli, Rafaela
- Alunos do Ensino Médio (CTI): Isabela, Lucas,
Larissa, Lucas

UNESP – Campus de Bauru

Contatos

- www2.fc.unesp.br/matematicaearte
- emilia.marques@unesp.br
- euro.marques@unesp.br
- arobinso@fc.unesp.br

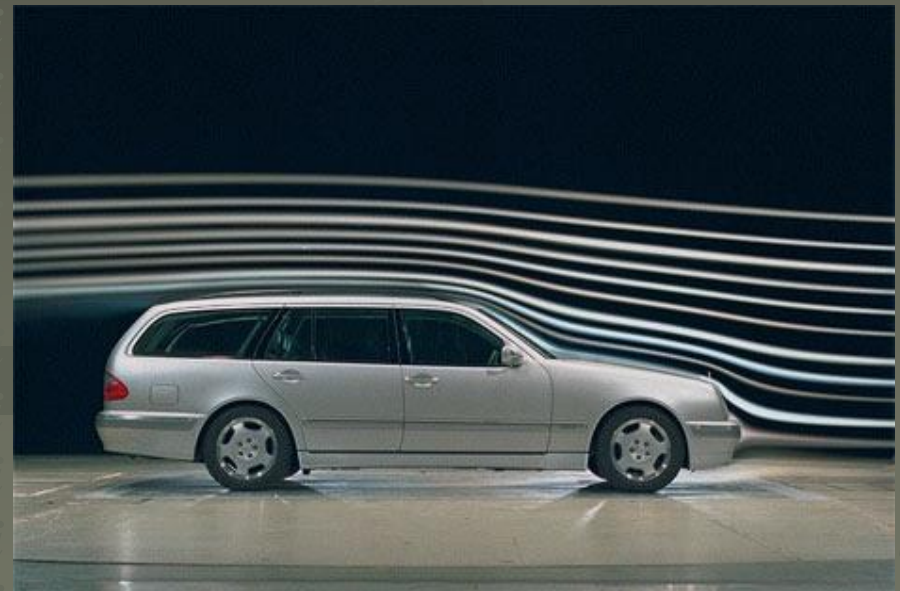
Objetivos:

- ✓ Apresentar aos participantes (professores e graduandos) correlações entre a Matemática, a Arte e a História no desenvolvimento de conceitos sobre funções que envolvem variáveis complexas.
- ✓ Promover a familiarização dos participantes com o software educativo F(C): Funções Complexas, desenvolvido por membros do grupo de pesquisa “Ensino de Ciências e Tecnologia Educacional”.
- ✓ Inserir os números complexos e suas funções elementares num novo contexto, associado à Computação Gráfica.

Algumas aplicações nas Ciências

Encontramos inúmeras aplicações dos números complexos na Ciência. Dentre outras podemos citar aplicações em:

- Engenharia Elétrica,
- Astronomia,
- Físico-Química,
- Mecânica dos Fluidos,
- Engenharia Aeronáutica,
- Ensino de Matemática e
- Artes.



NATAL

Técnica:
Computação
Gráfica

Emília 2009

$$f(z) = -i \left[\tan^3 \left(\frac{z^2}{100} (1+i)^2 \right) + \operatorname{Im} \left(\tan^3 \left(\frac{z^2}{100} (1+i)^2 \right) (1+i) \right) \right] - 0.2i$$

PRIMAVERA

Técnica:
Computação
Gráfica

Emília 2009

$$f(z) = i \operatorname{Re} \left[\tan^5 \left(\frac{-z + zi}{10} \right) + i \left(\overline{\tan^5 \left(\frac{-z + zi}{10} \right)} \right) \right] - 0.2i$$

BORBOLETAS

Técnica:
Computação
Gráfica

Emília 2009

$$f(z) = \left(\operatorname{Im} \left[\tan^3 \left(\frac{z}{10} \right) - \overline{\tan^3 \left(\frac{z}{10} \right) i} \right] (1-i) \right) - 0.2i$$

Conjunto dos Complexos

- Definição Algébrica

$$\mathbf{C} = \left\{ z = a + bi \mid a, b \in \mathbf{R}, i^2 = -1 \right\}$$

- Exemplos:

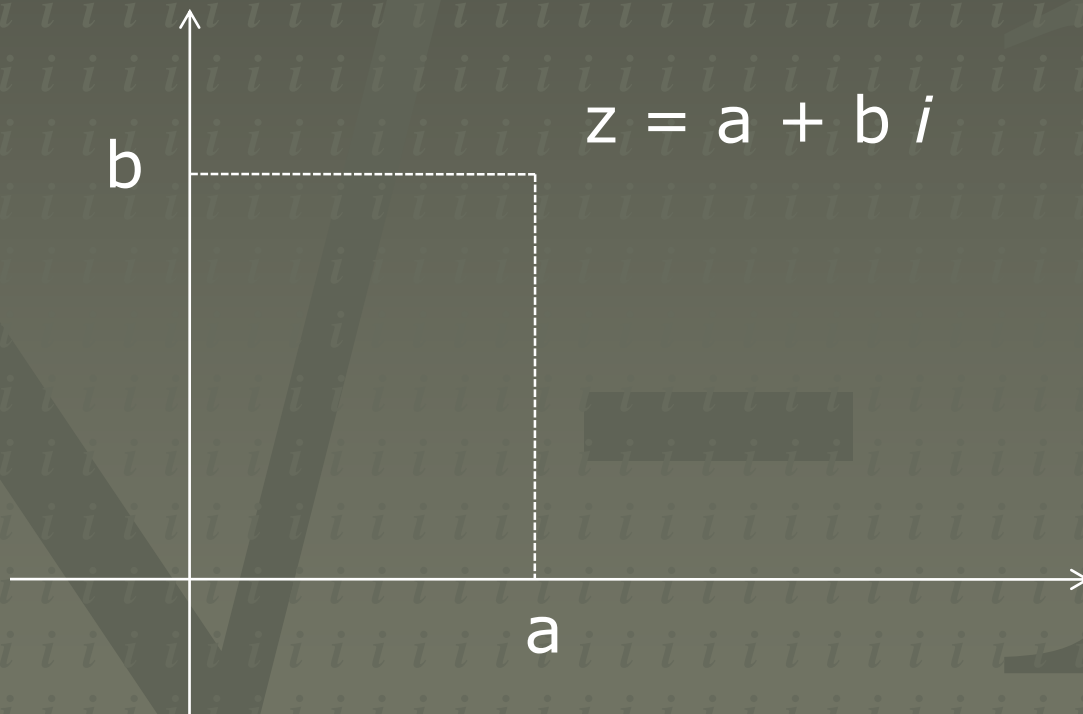
1) $z = 2 + 3i$

2) $z = \sqrt{3} + \frac{1}{2}i$

3) $z = 1 - 2\pi i$

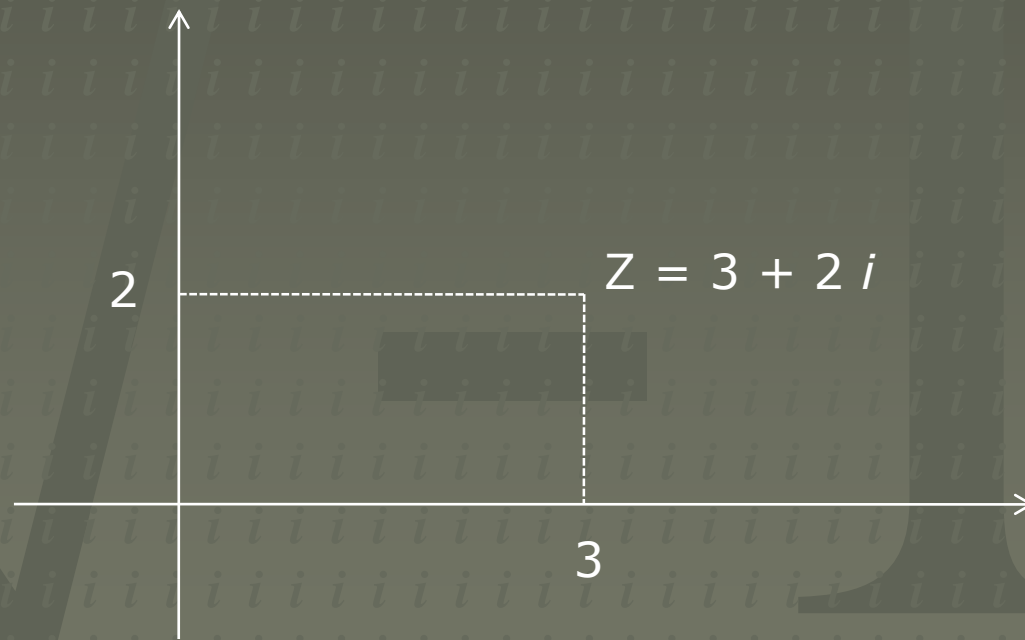
Conjunto dos Complexos

✓ Representação Cartesiana

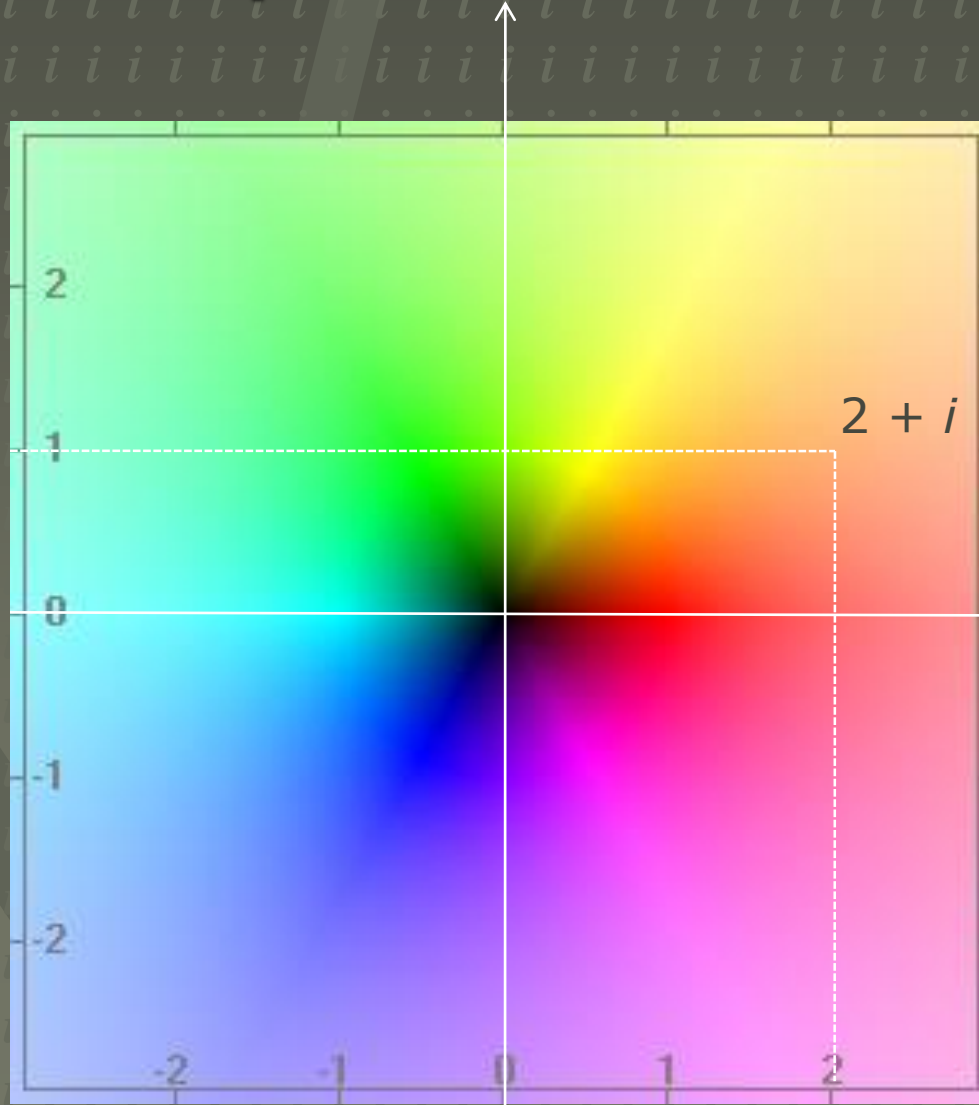


Conjunto dos Complexos

✓ Exemplo:



Conjunto dos Complexos: Mapa de Cores



Conjunto dos Complexos: Operações

Sejam

$$z = a + bi, w = c + di \in \mathbf{C} \text{ e } k, a, b, c, d \in \mathbf{Z}$$

• Adição:

$$1) z + k = (a + k) + bi$$

$$2) z + w = (a + c) + (b + d)i$$

Conjunto dos Complexos: Operações

- Multiplicações

$$1) k \cdot z = ka + kbi$$

$$2) z \cdot w = (ab - cd) + (bc + ad)i$$

- Potência natural (não nulo)

$$z^n = \begin{cases} z^1 = z \\ z^n = z^{n-1} \cdot z \end{cases}$$

Funções Complexas de Variáveis Complexas

Identidade

$$f : A \subset \mathbf{C} \rightarrow B \subset \mathbf{C}$$

$$z = a + bi \rightarrow f(z) = z = a + bi$$

Conjugação

$$f : A \subset \mathbf{C} \rightarrow B \subset \mathbf{C}$$

$$z = a + bi \rightarrow f(z) = \bar{z} = a - bi$$

Domínios Coloridos de Funções Complexas de Variável Complexa

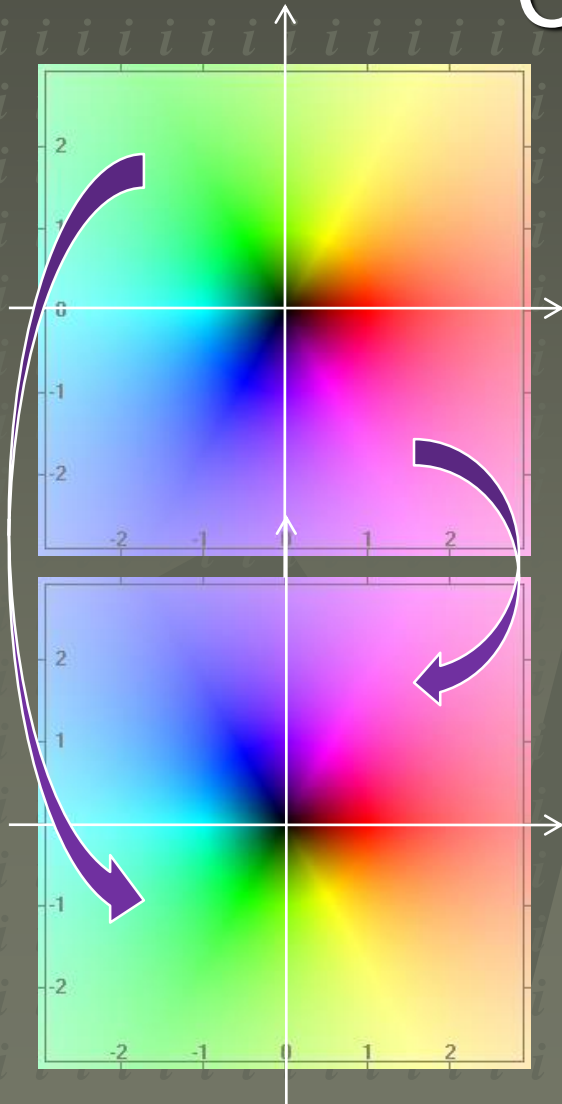


Função Identidade

$$f(z) = z = a + bi$$

Função Conjugação

$$f(z) = \bar{z} = a - bi$$



Funções Reais de Variáveis Complexas

Parte Real

$$f : A \subset \mathbf{C} \rightarrow B \subset \mathbf{R}$$

$$z = a + bi \rightarrow f(z) = \operatorname{Re}(z) = a$$

Parte Imaginária

$$f : A \subset \mathbf{C} \rightarrow B \subset \mathbf{R}$$

$$z = a + bi \rightarrow f(z) = \operatorname{Im}(z) = b$$

Domínios Coloridos de Funções Reais de Variável Complexa



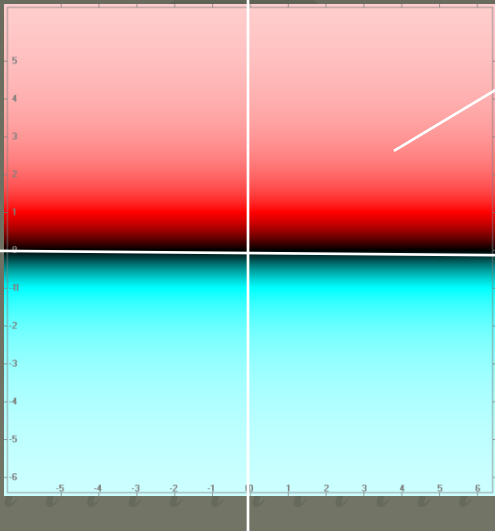
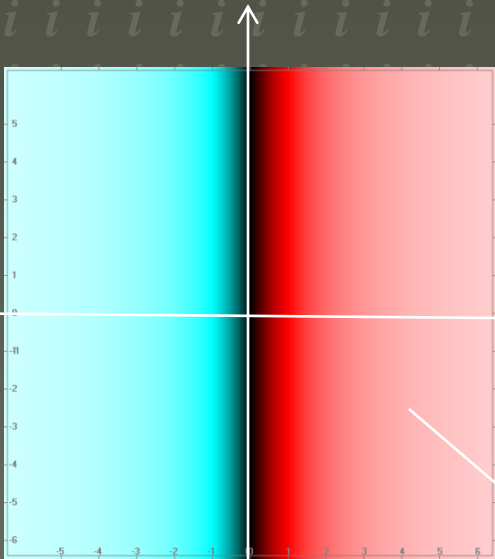
Função Parte Real

$$f(z) = \operatorname{Re}(z) = a$$

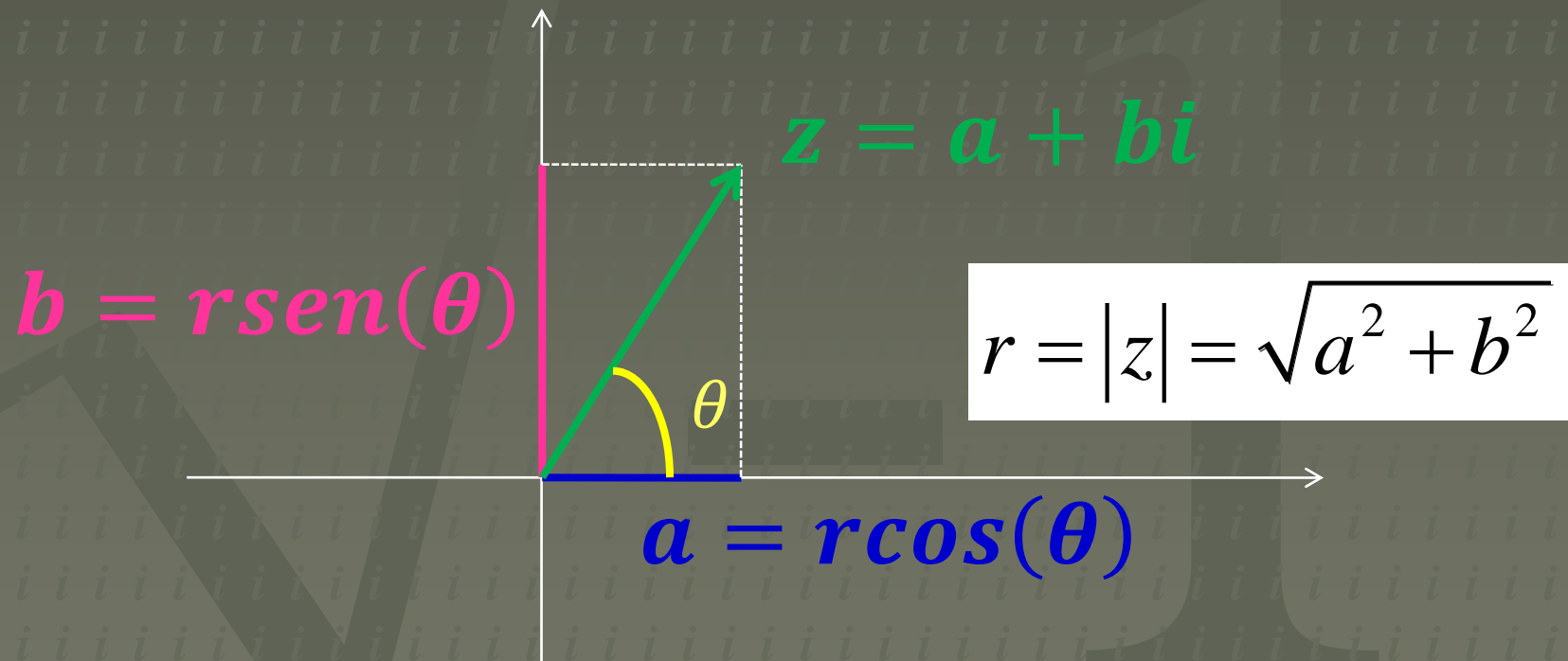
Valores reais positivos

Função Parte Imaginária

$$f(z) = \operatorname{Im}(z) = b$$



Representação Polar ou Trigonométrica de um Número Complexo



Representação Polar ou Trigonométrica de um Número Complexo

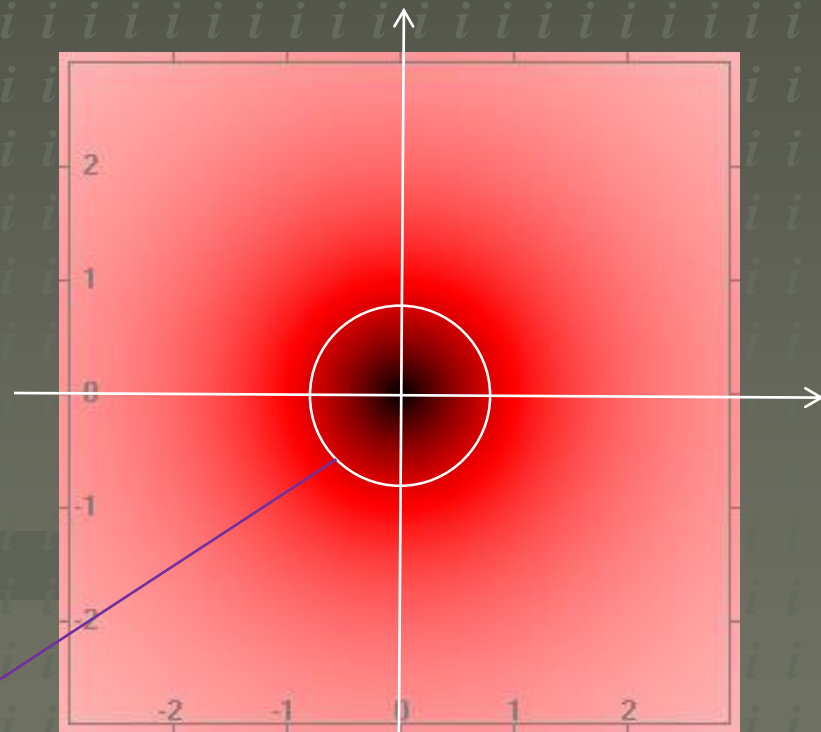
$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2};$$

$$z = a + bi = r(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)),$$

Domínio Colorido da Função Real chamada **Módulo**

$$f(z) = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- ✓ Valores sempre reais e positivos
- ✓ Tons de Vermelho

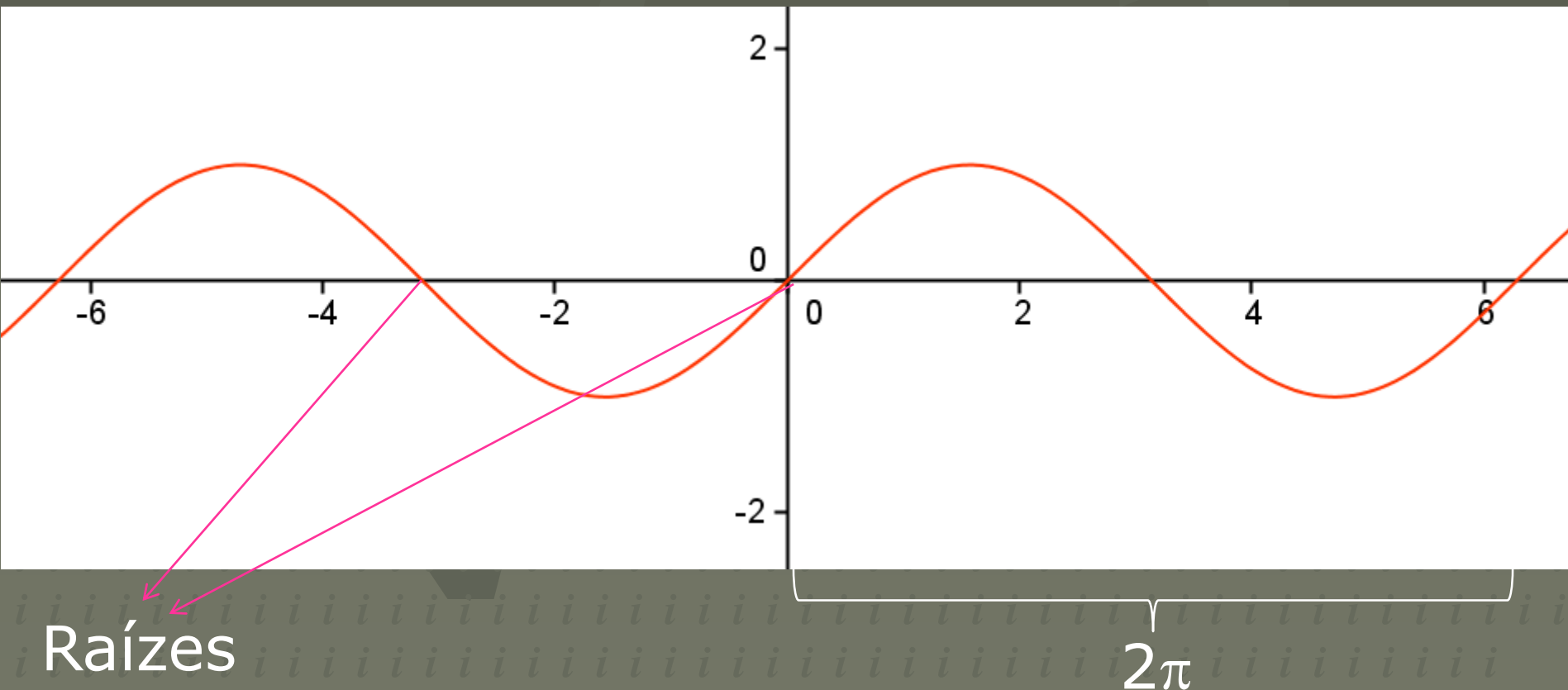


Mesmo Módulo = Mesma Tonalidade

Gráficos das Funções Trigonométricas Reais

Seno:

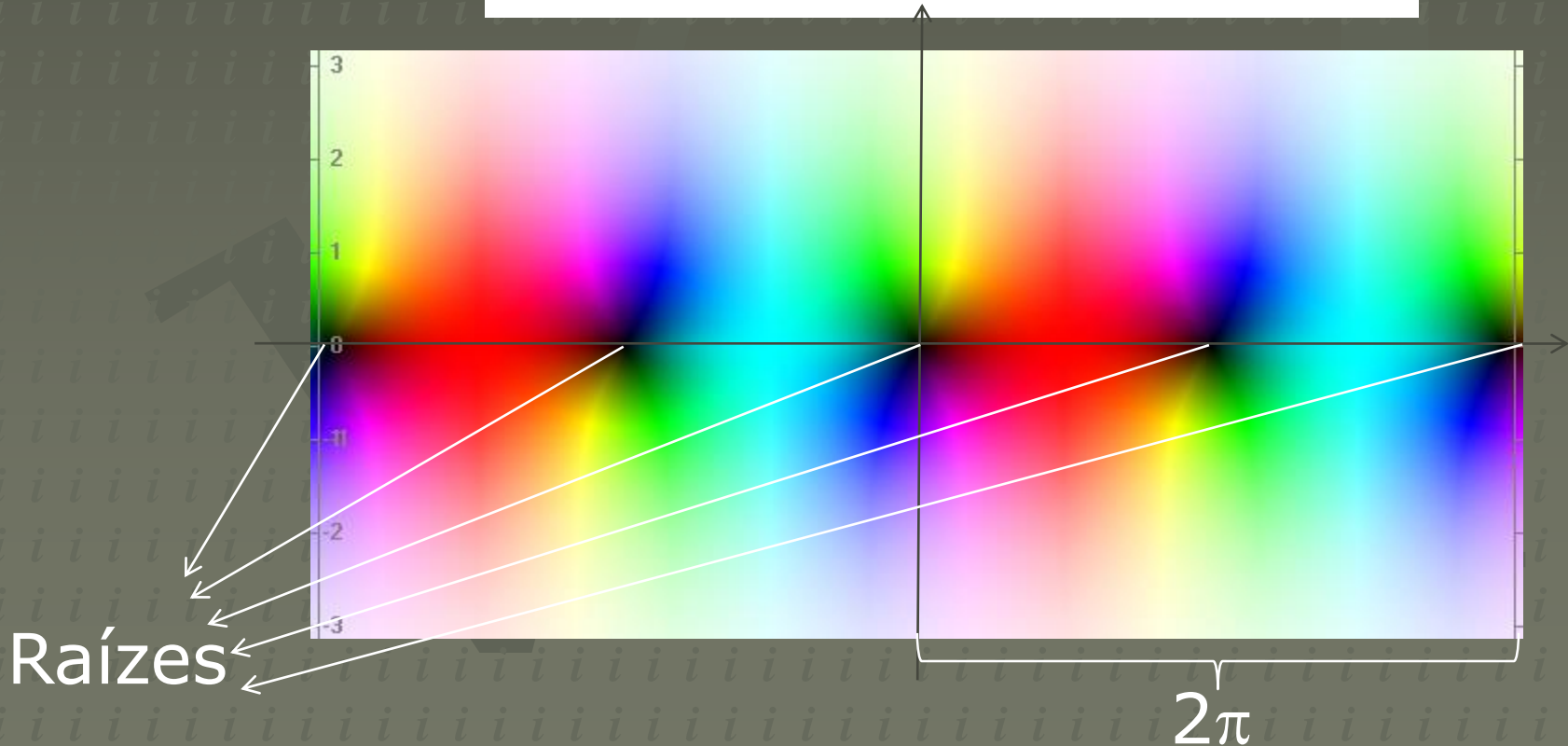
$$f(x) = \sin(x)$$



Domínios Coloridos das Funções Trigonométricas Complexas

Seno:

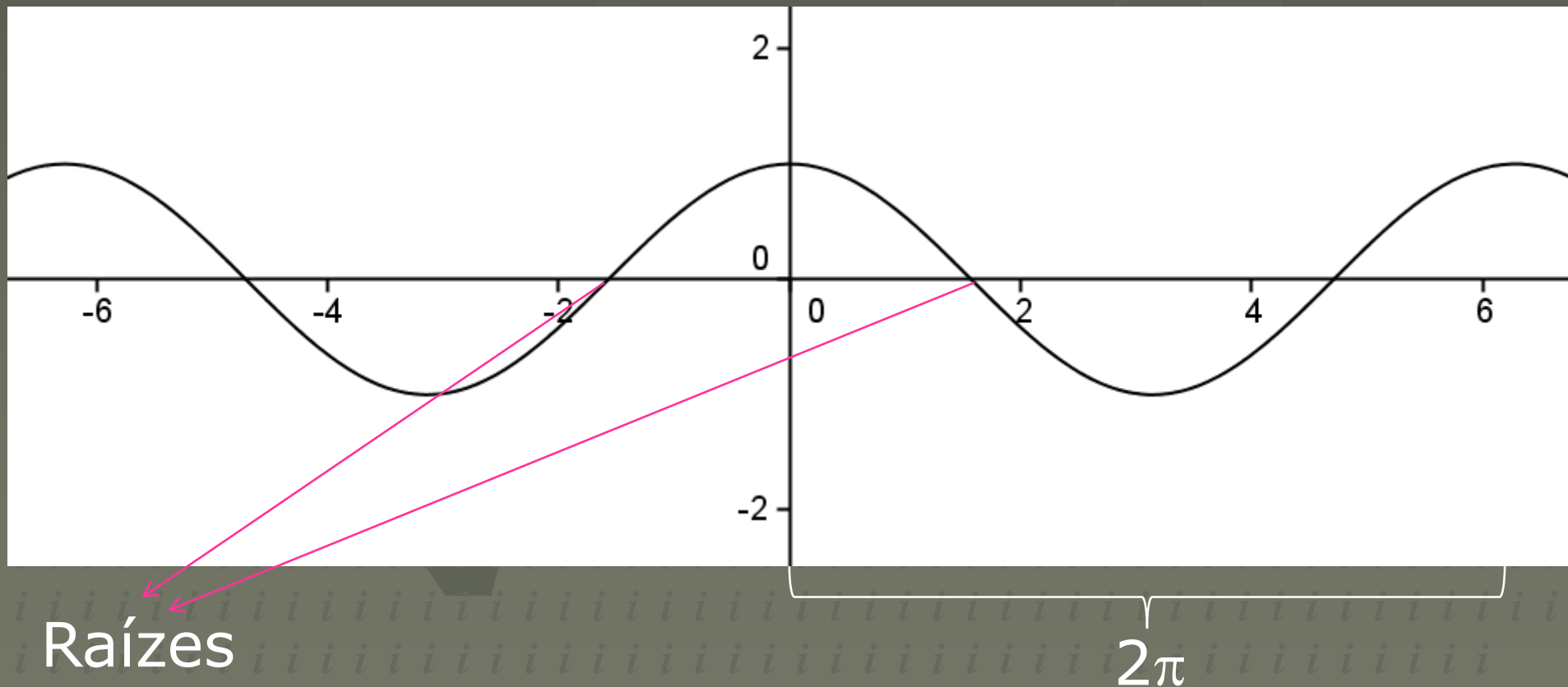
$$f(z) = \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$



Gráficos das Funções Trigonométricas Reais

Cosseno:

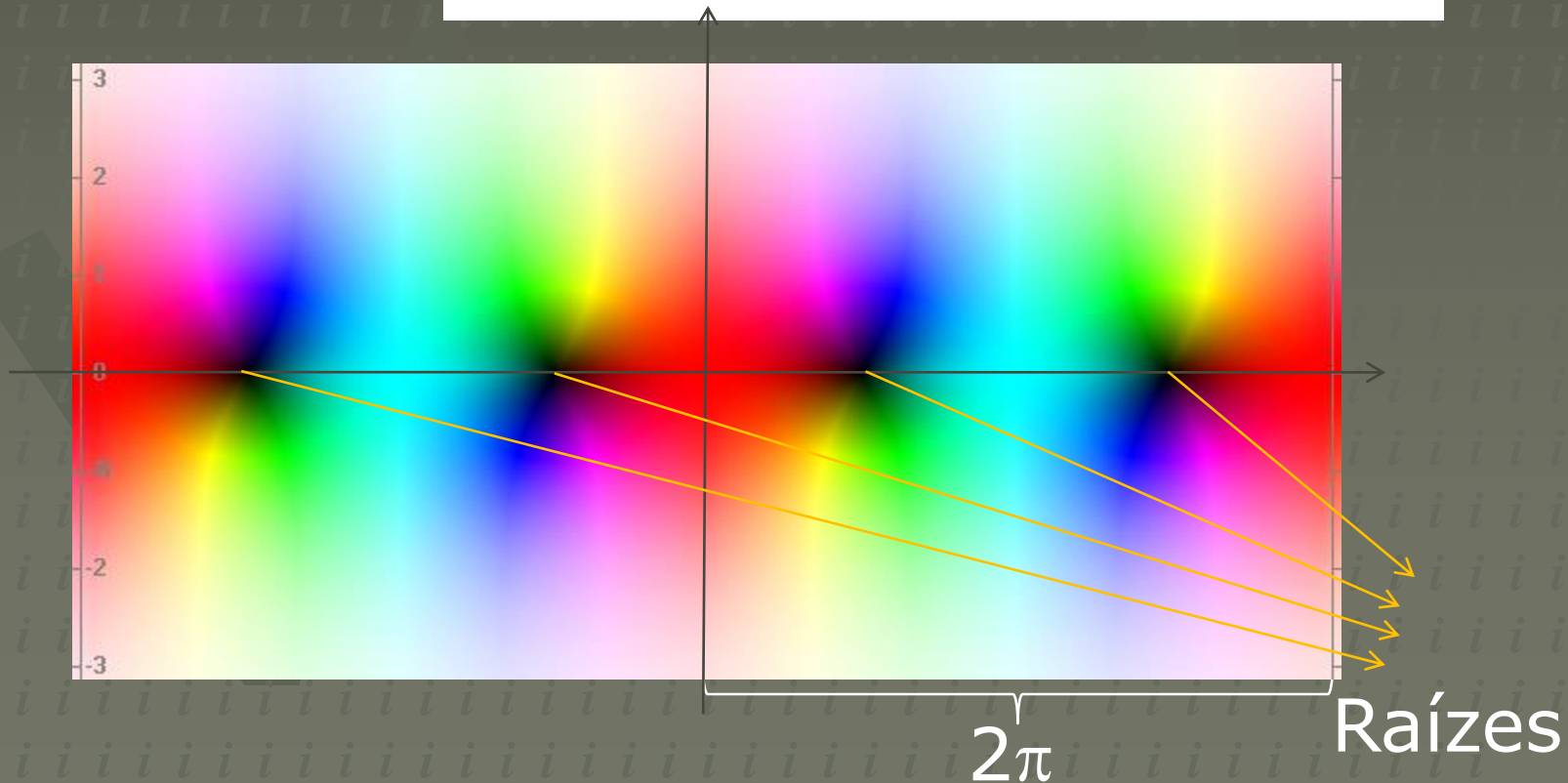
$$f(x) = \cos(x)$$



Domínios Coloridos das Funções Trigonométricas Complexas

Cosseno:

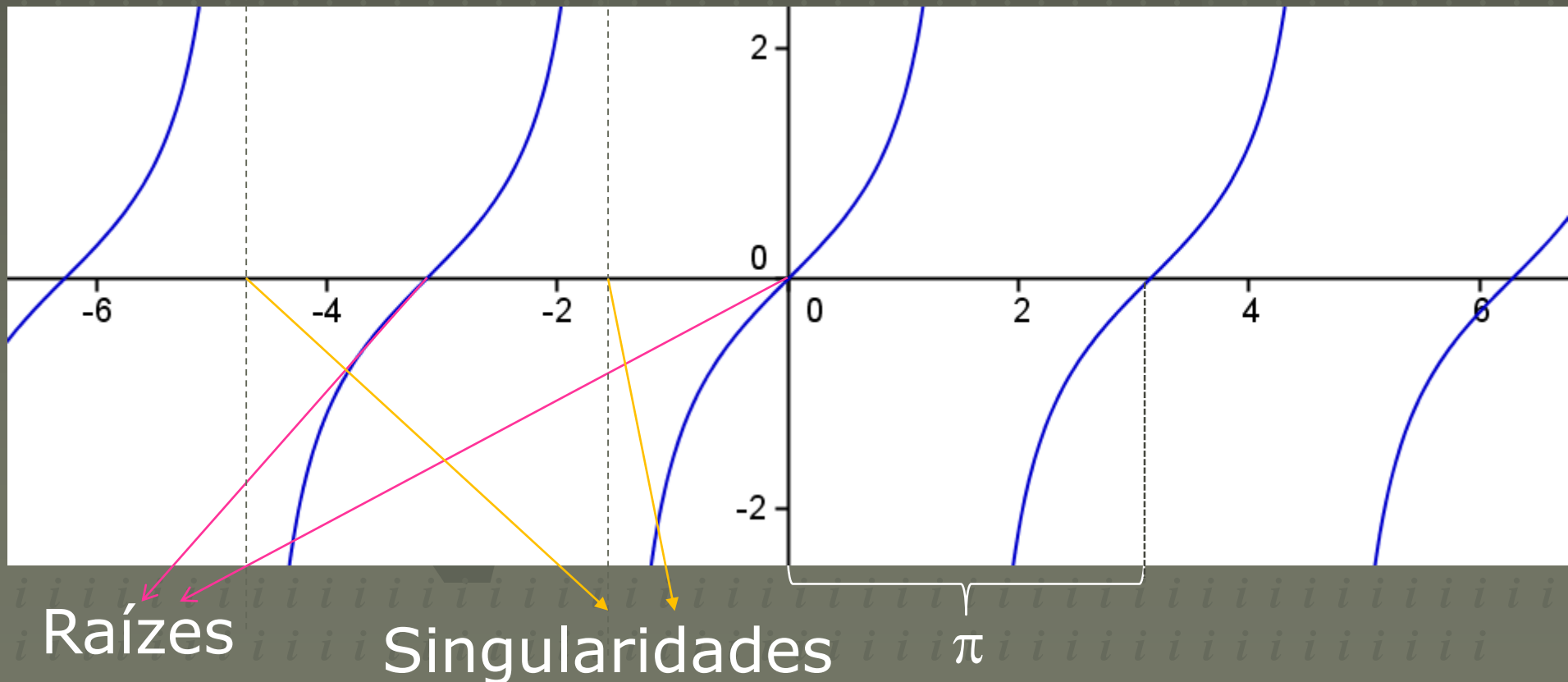
$$f(z) = \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$



Gráficos das Funções Trigonométricas Reais

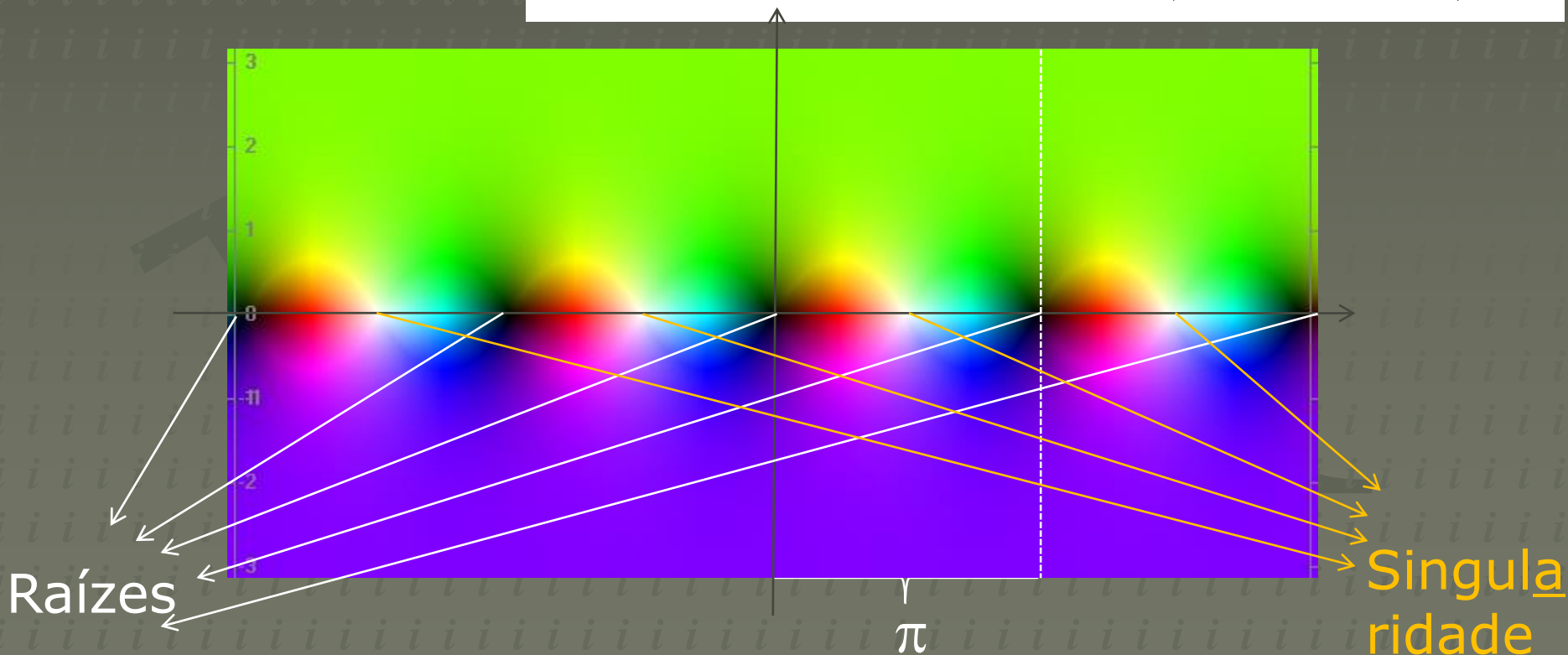
Tangente:

$$f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

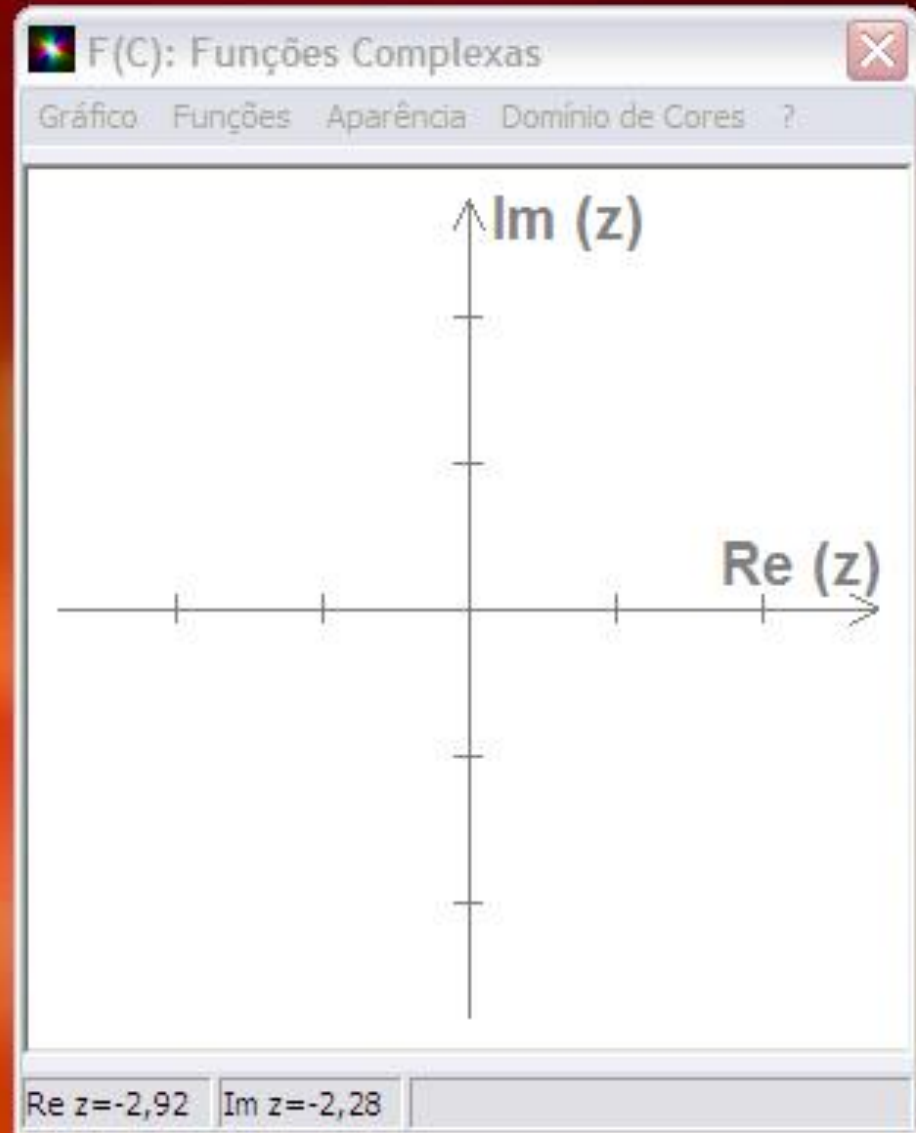
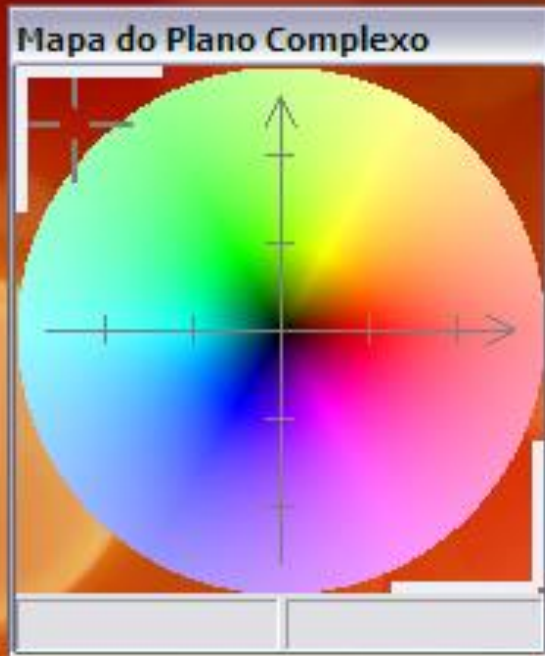


Domínios Coloridos das Funções Trigonométricas Complexas

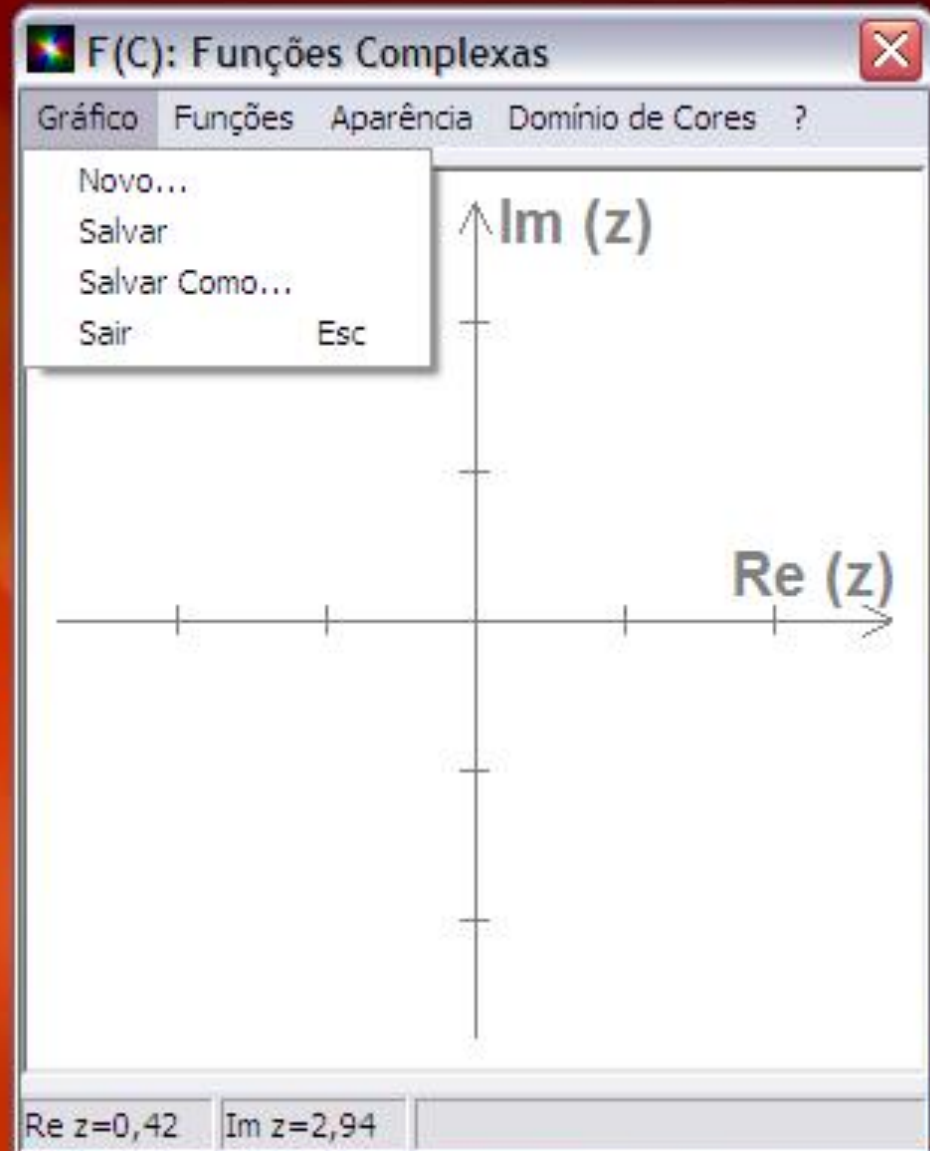
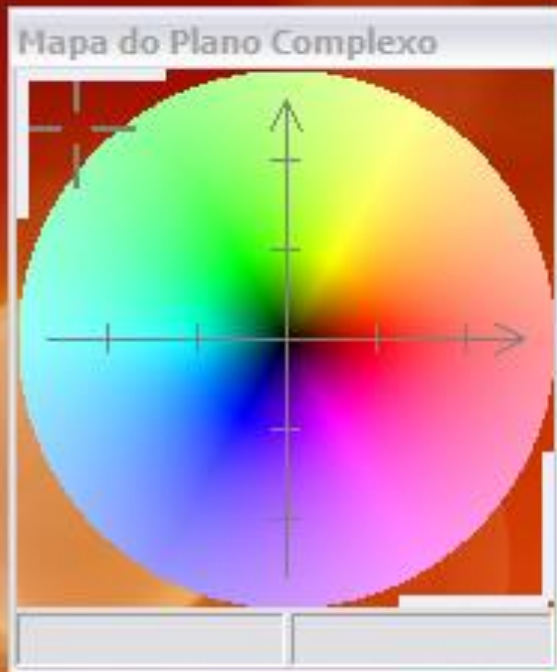
Tangente:
$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{(e^{iz} + e^{-iz})i}$$



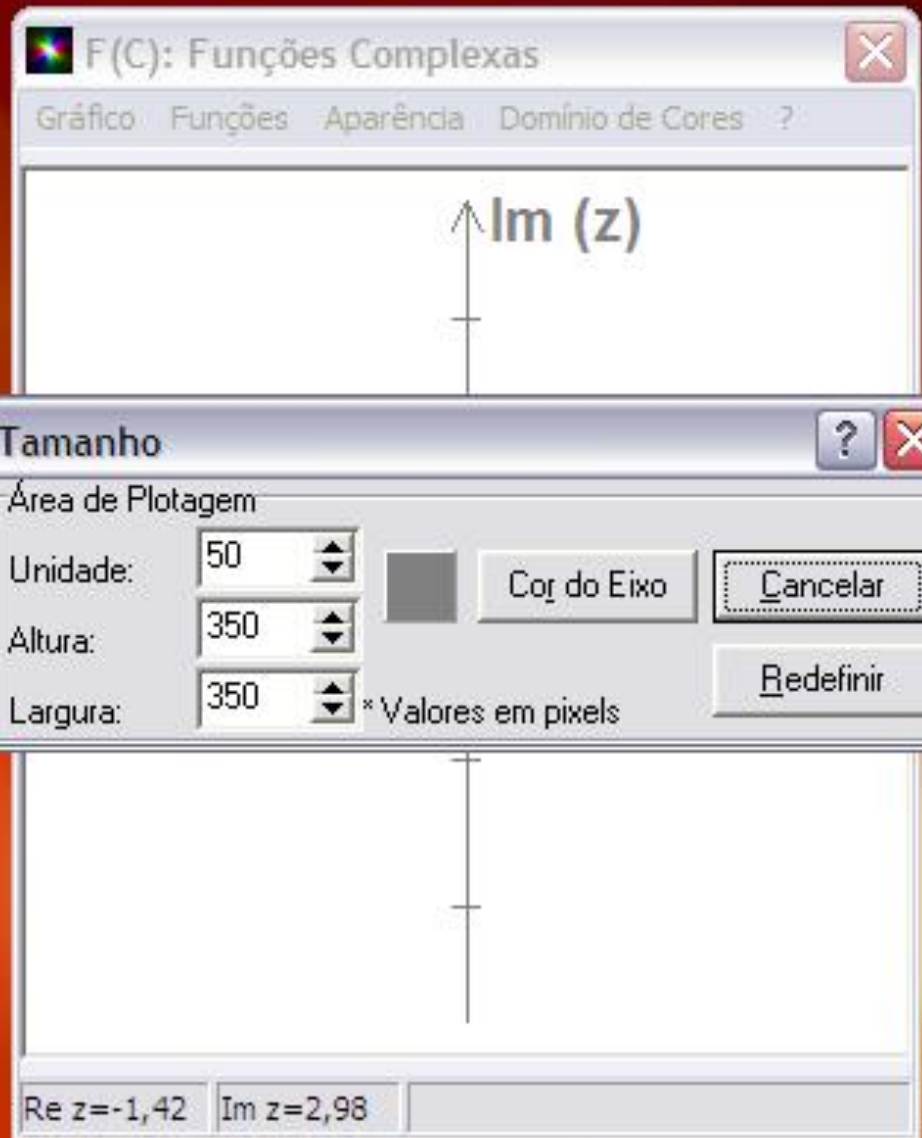
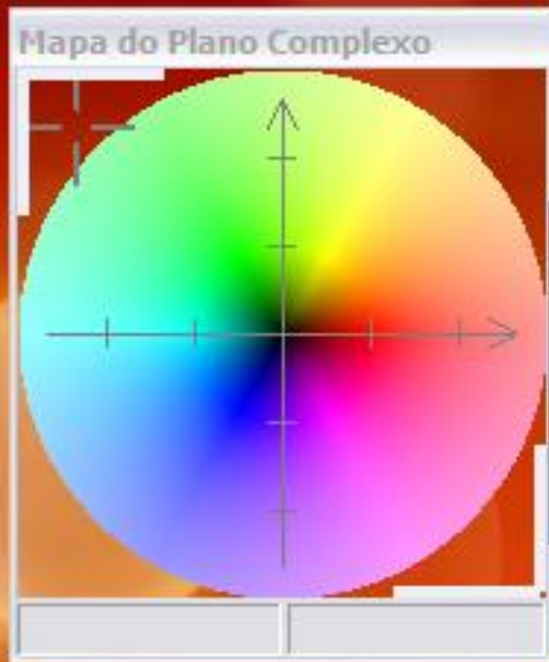
Apresentação do Software



Comando: Gráfico



Comando: Gráfico - Novo



F(C): Funções Complexas

Gráfico Funções Aparência Domínio de Cores ?

Im (z)

Tamanho

Área de Plotagem

Unidade: 50

Altura: 350

Largura: 350 * Valores em pixels

Cor do Eixo

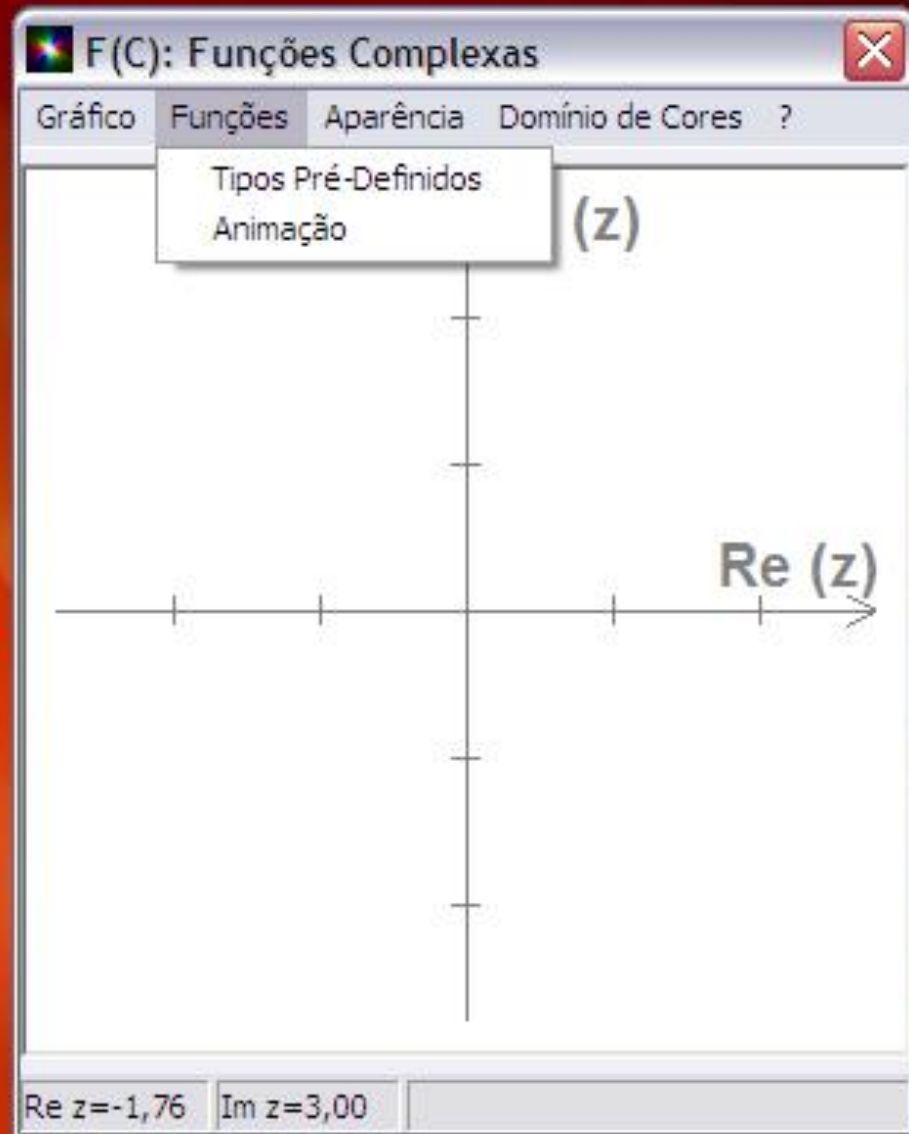
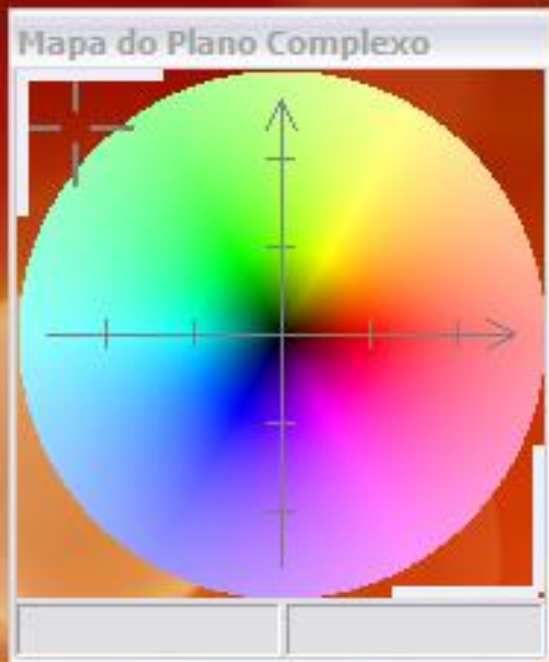
Cancelar

Redefinir

Re z=-1,42 Im z=2,98

The main window displays a coordinate system with the vertical axis labeled 'Im (z)'. A 'Tamanho' (Size) dialog box is open, showing settings for the plot area: 'Unidade' (Unit) is 50, 'Altura' (Height) is 350, and 'Largura' (Width) is 350. The dialog also includes a 'Cor do Eixo' (Axis Color) button, 'Cancelar' (Cancel), and 'Redefinir' (Reset) buttons. At the bottom of the main window, the current coordinates are shown as 'Re z=-1,42' and 'Im z=2,98'.

Comando: Funções



Comando: Funções

Tipos Pré-Definidos

The image displays a software interface for plotting complex functions, consisting of three main windows:

- Mapa do Plano Complexo:** A window showing a color-coded unit circle in the complex plane, with axes and tick marks.
- F(C): Funções Complexas:** A window with a menu bar (Gráfico, Funções, Aparência, Domínio de Cores, ?) and a coordinate system for the imaginary part of z , labeled $\text{Im}(z)$.
- Plotar Função:** A dialog box for selecting the function type and defining coefficients. It contains the text "Escolha o Tipo da Função e Defina os Valores para os Coeficientes" and a dropdown menu. Below the menu are four input fields for coefficients A, B, C, and D, with values 1, 1, 1, and 0 respectively. Buttons for "Cancelar" and "Plotar" are also present.

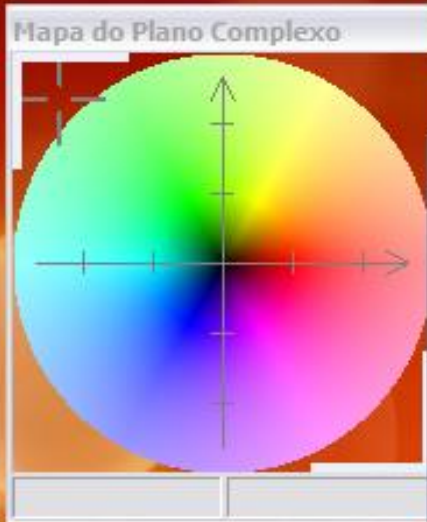
At the bottom of the **F(C): Funções Complexas** window, the current complex number is displayed as $\text{Re } z = -0,84$ and $\text{Im } z = 2,92$.

Comando: Funções Tipos Pré-Definidos

The image displays a software interface for plotting complex functions, consisting of three overlapping windows:

- Mapa do Plano Complexo**: A window showing a circular plot of the complex plane with a color gradient from blue to red.
- F(C): Funções Complexas**: A window with a menu bar (Gráfico, Funções, Aparência, Domínio de Cores, ?) and a coordinate system with a vertical axis labeled $\text{Im}(z)$.
- Plotar Função**: A window titled "Escolha o Tipo da Função e Defina os Valores para os Coeficientes" (Choose the Function Type and Define the Values for the Coefficients). It features a list of predefined function types:
 - $f(z) = A \cdot z^B \cdot C + D$
 - $f(z) = A \cdot \text{sen}^C(z^B) + D$
 - $f(z) = A \cdot \text{cos}^C(z^B) + D$
 - $f(z) = A \cdot \text{tan}^C(z^B) + D$
 - $f(z) = A \cdot \text{arcsen}^C(z^B) + D$
 - $f(z) = A \cdot \text{arccos}^C(z^B) + D$
 - $f(z) = A \cdot \text{arctan}^C(z^B) + D$
 - $f(z) = A \cdot \text{senh}^C(z^B) + D$Buttons for "Cancelar" (Cancel) and "Plotar" (Plot) are visible. At the bottom, the current complex number is displayed as $\text{Re } z = -0,84$ and $\text{Im } z = 2,92$.

Comando: Funções Animação



Animar Função

Escolha o Tipo da Função e Defina os Valores para os Coeficientes

[Dropdown menu]

A	B	C	D
1	1	1	0

Animar Função

Coeficiente Dinâmico

'A' Até [2]

'B'

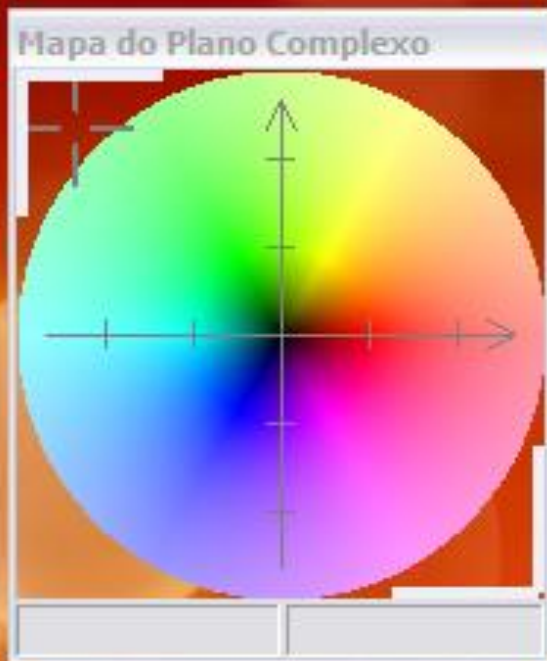
'C'

'D'

Incremento [0,1] FPS [1]

[Cancelar] [Gerar Animação...]

Comando: Aparência



F(C): Funções Complexas

Gráfico Funções Aparência Domínio de Cores ?

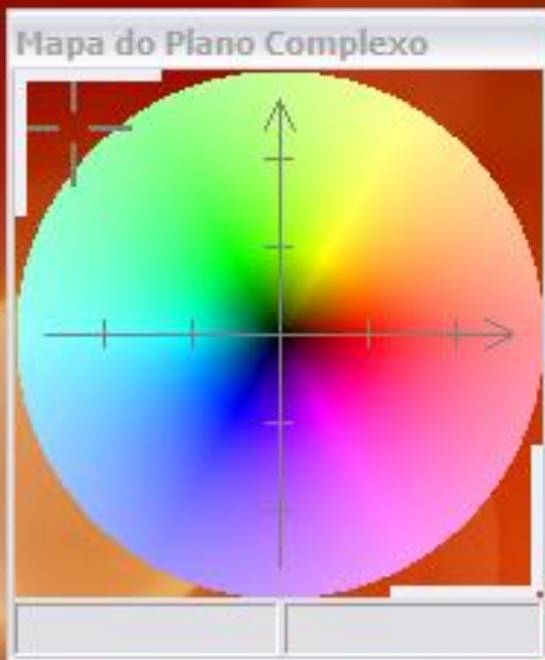
- Eixos Ctrl+X
- Escala Ctrl+S
- Grade Ctrl+G
- Mapa ▶
- Transformações ▶
- Coordenadas ▶
- Lupa
- Vídeos

Re z=-0,52 Im z=3,00

(z)

The screenshot shows the 'Aparência' (Appearance) menu of the 'F(C): Funções Complexas' software. The menu is open, showing options for 'Eixos' (checked), 'Escala', 'Grade', 'Mapa', 'Transformações', 'Coordenadas', 'Lupa', and 'Vídeos'. The 'Eixos' option has the keyboard shortcut 'Ctrl+X'. Below the menu, the current complex number is displayed as 'Re z=-0,52 Im z=3,00'. The background of the software window shows a complex plane with axes and a color gradient.

Comando: Aparência - Mapa



F(C): Funções Complexas

Gráfico Funções Aparência Domínio de Cores ?

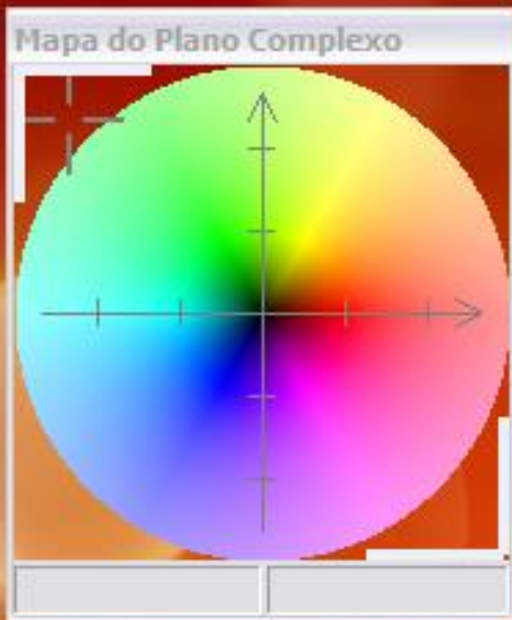
- ✓ Eixos Ctrl+X
- Escala Ctrl+S
- Grade Ctrl+G
- Mapa ▶
 - ✓ Eixos
 - Escala
 - Ocultar
 - Tamanho...
- Transformações ▶
- Coordenadas ▶
- Lupa
- Vídeos

Re $z = -0,52$ Im $z = 3,00$

The screenshot shows the 'Aparência' (Appearance) menu of the 'F(C): Funções Complexas' software. The menu is open, showing options like 'Eixos', 'Escala', 'Grade', 'Mapa', 'Transformações', 'Coordenadas', 'Lupa', and 'Vídeos'. The 'Mapa' option is highlighted, and its sub-menu is also open, showing 'Eixos', 'Escala', 'Ocultar', and 'Tamanho...'. The software interface includes a title bar, a menu bar, and a status bar at the bottom displaying the real and imaginary parts of a complex number z .

Comando: Aparência

Transformações



F(C): Funções Complexas

Gráfico Funções Aparência Domínio de Cores ?

- ✓ Eixos Ctrl+X
- Escala Ctrl+S
- Grade Ctrl+G
- Mapa ▶
- Transformações ▶** Mostrar
- Coordenadas ▶
- Lupa
- Vídeos

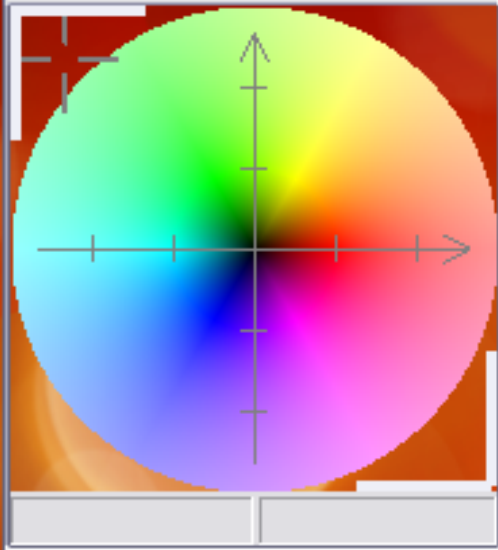
(z)

Re z=0,38 Im z=2,98

The screenshot shows the 'Aparência' (Appearance) menu of the 'F(C): Funções Complexas' software. The menu is open, showing options like 'Eixos', 'Escala', 'Grade', 'Mapa', 'Transformações', 'Coordenadas', 'Lupa', and 'Vídeos'. The 'Transformações' option is highlighted, and a sub-menu is visible with the 'Mostrar' (Show) option. The software interface also displays the real and imaginary parts of a complex number z at the bottom: $\text{Re } z=0,38$ and $\text{Im } z=2,98$.

Comando: Aparência Transformações

Mapa do Plano Complexo



Ferramentas

Livre   Mantenha pressionada a tecla ctrl para travar o cursor

Transformações

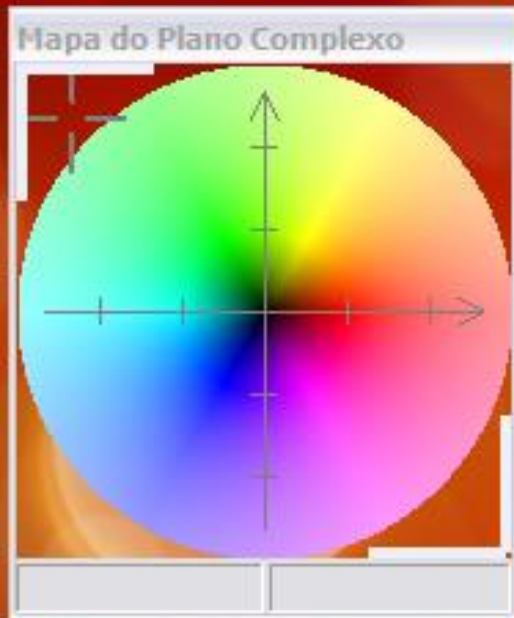
Domínio  **Limpar**  **Imagem**

$f(z)$
 \Rightarrow

Mantenha pressionada a tecla shift para marcar o rastro do cursor

Re $z=1,12$ Im $z=2,38$

Comando: Aparência Coordenadas



F(C): Funções Complexas

Gráfico Funções Aparência Domínio de Cores ?

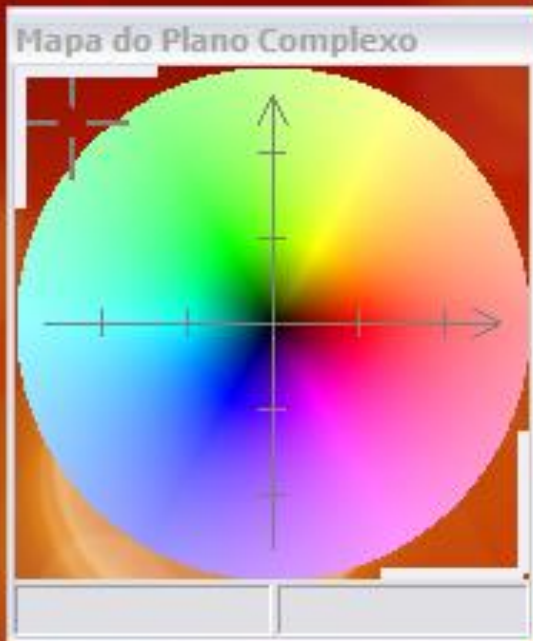
- ✓ Eixos Ctrl+X
- Escala Ctrl+S
- Grade Ctrl+G
- Mapa ▶
- Transformações ▶
- Coordenadas ▶**
 - Polar
 - Retangular
- Lupa
- Vídeos

Re z=0,96 Im z=2,92

The screenshot shows the 'Aparência' (Appearance) menu of the 'F(C): Funções Complexas' software. The 'Coordenadas' (Coordinates) option is selected, and its sub-menu is open, showing 'Polar' and 'Retangular' (Rectangular) options. The 'Retangular' option is currently selected with a radio button. The main window shows a coordinate system with a horizontal axis labeled 'z' and a vertical axis. At the bottom, the current coordinates are displayed as 'Re z=0,96' and 'Im z=2,92'.

Comando: Aparência

Coordenadas



F(C): Funções Complexas

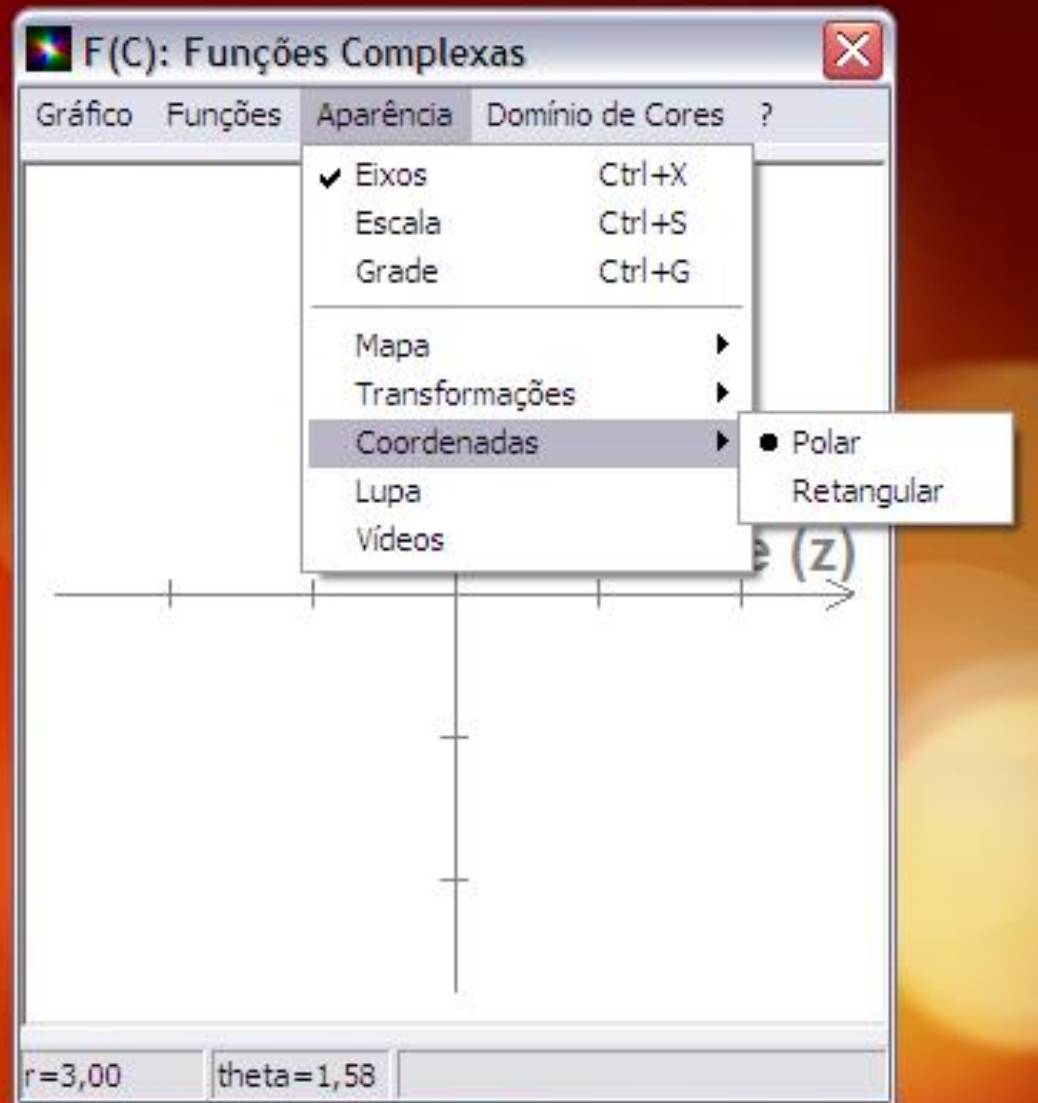
Gráfico Funções Aparência Domínio de Cores ?

<input checked="" type="checkbox"/> Eixos	Ctrl+X
Escala	Ctrl+S
Grade	Ctrl+G
Mapa	▶
Transformações	▶
Coordenadas	▶
Lupa	
Vídeos	

● Polar
Retangular

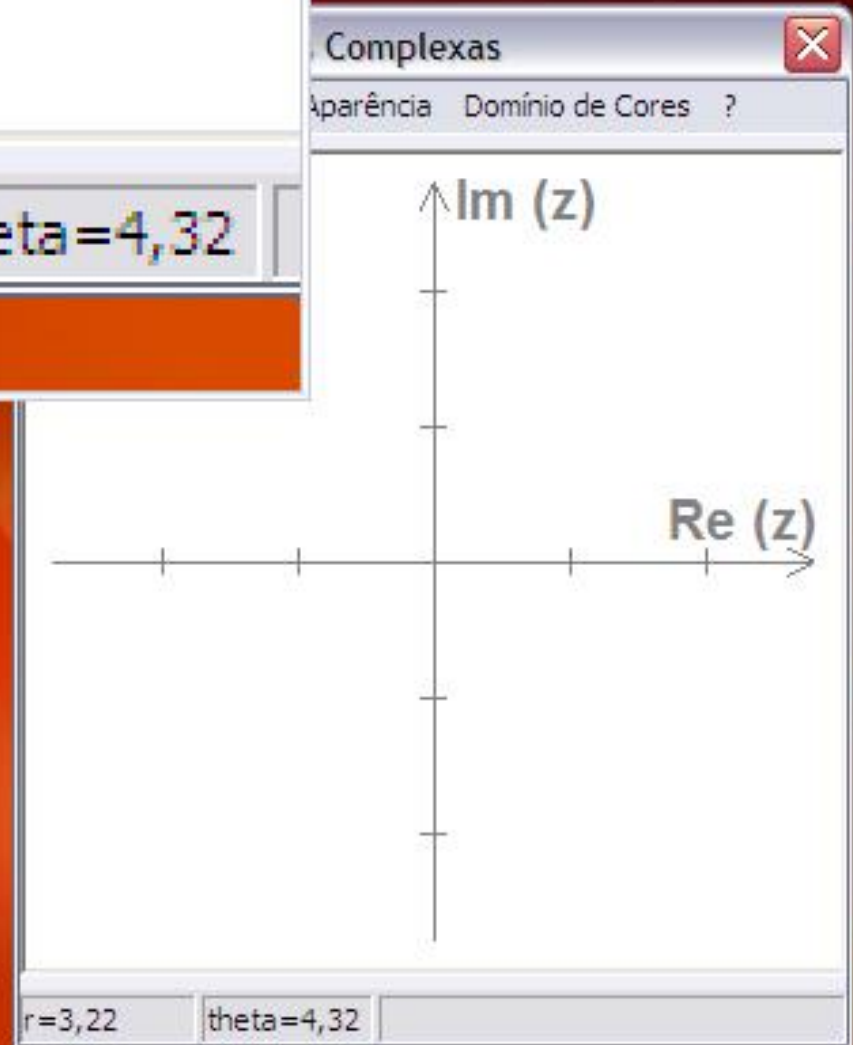
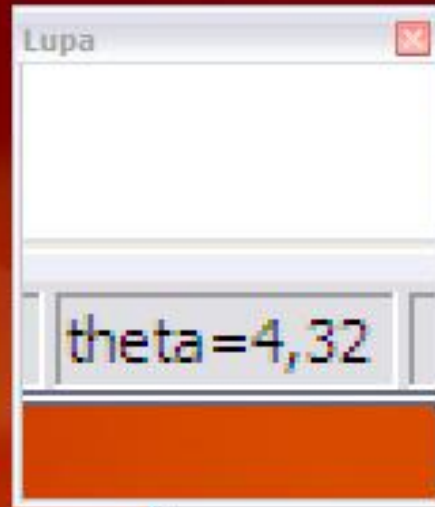
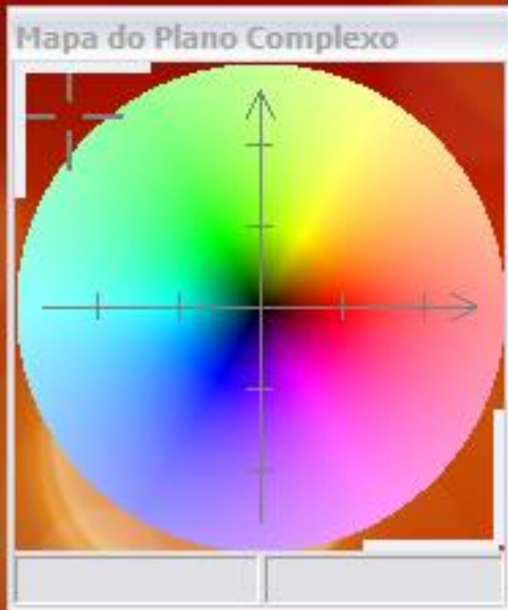
(Z)

r=3,00 theta=1,58



The screenshot shows the 'F(C): Funções Complexas' software interface. The 'Aparência' menu is open, showing options like 'Eixos', 'Escala', 'Grade', 'Mapa', 'Transformações', 'Coordenadas', 'Lupa', and 'Vídeos'. The 'Coordenadas' option is selected, and its sub-menu is open, showing 'Polar' (selected) and 'Retangular'. The main window displays a complex plane with axes and a point labeled '(Z)'. The status bar at the bottom shows 'r=3,00' and 'theta=1,58'.

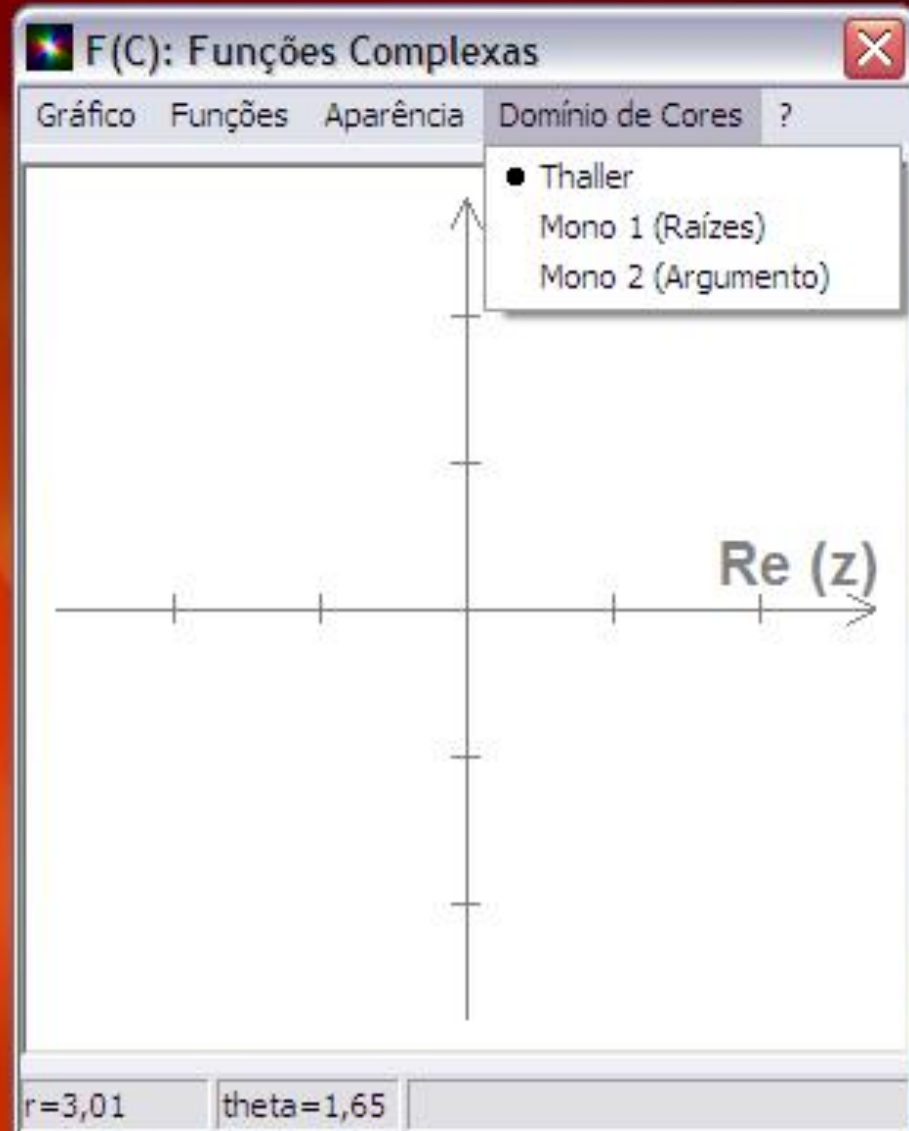
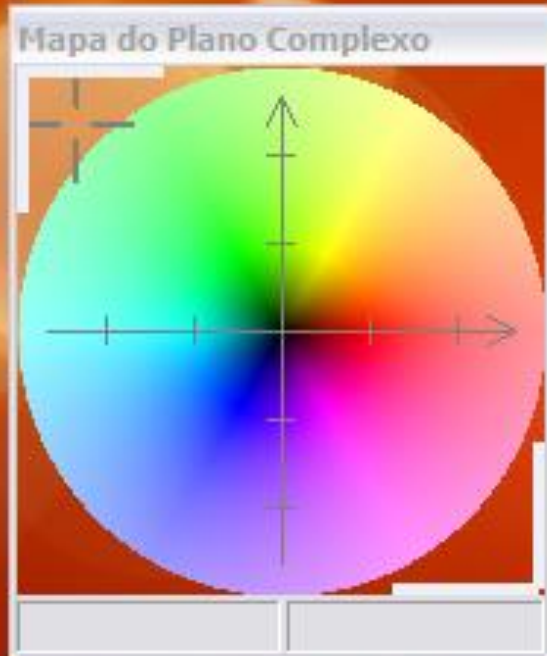
Comando: Aparência - Lupa



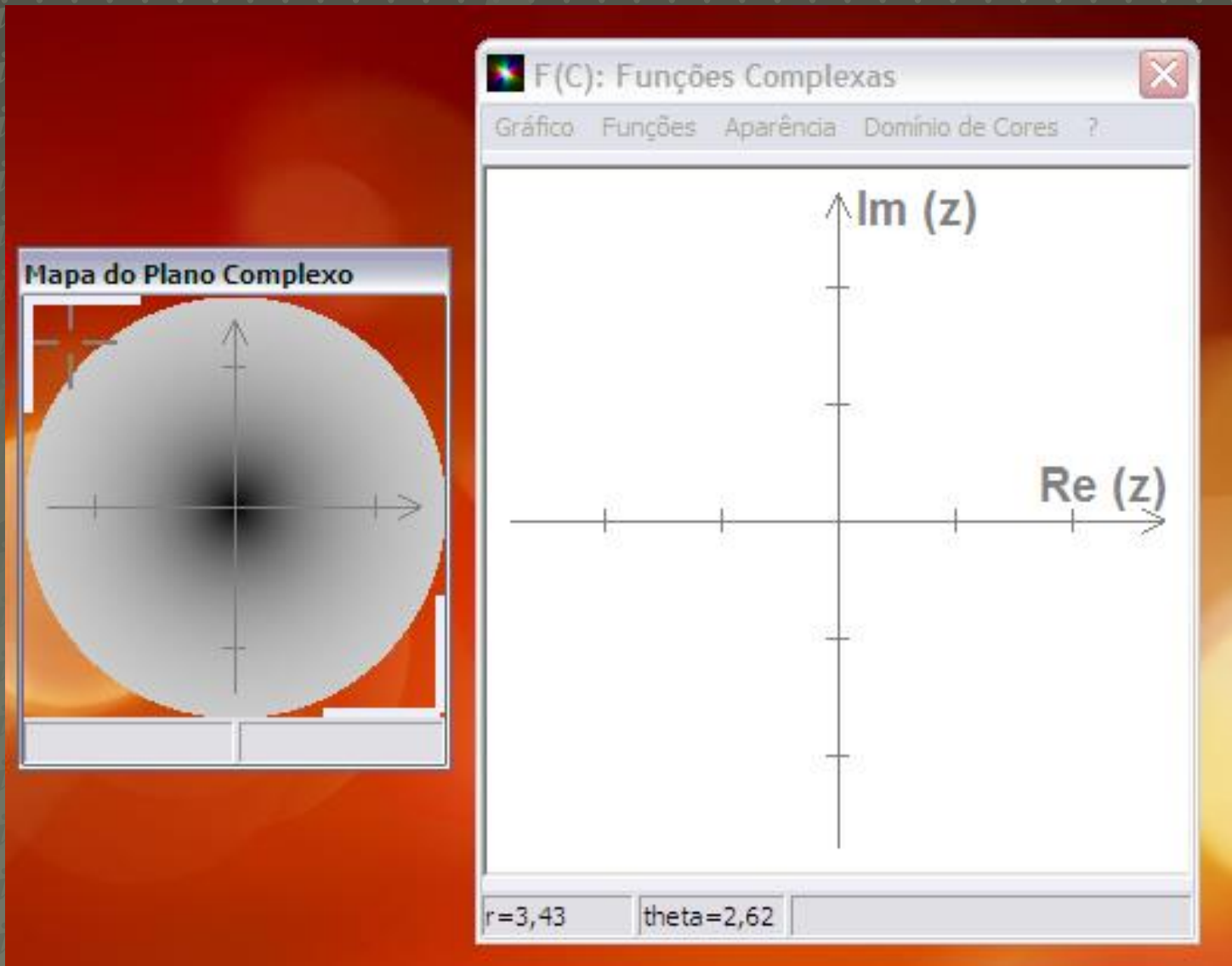
Comando: Aparência - Video

The image shows a software interface with several windows. The main window, titled "Vídeos", contains a large black area with the text "Clique Aqui para Abrir uma Animação" centered in it. Below this area is a control bar with standard media player buttons: play/pause, stop, next, previous, and full screen. To the left of the main window is a smaller window titled "Mapa do Plano Complexo" which displays a circular color map of the complex plane. The colors transition from blue on the left, through green and yellow, to red and pink on the right, with purple at the bottom. To the right of the main window is another window titled "xas" with a subtitle "Domínio de Cores ?". It shows a coordinate system with a horizontal axis labeled "Re (z)" and a vertical axis labeled "Im (z)". At the bottom of the interface, there are two input fields: the first contains "r=3,01" and the second contains "theta=1,65".

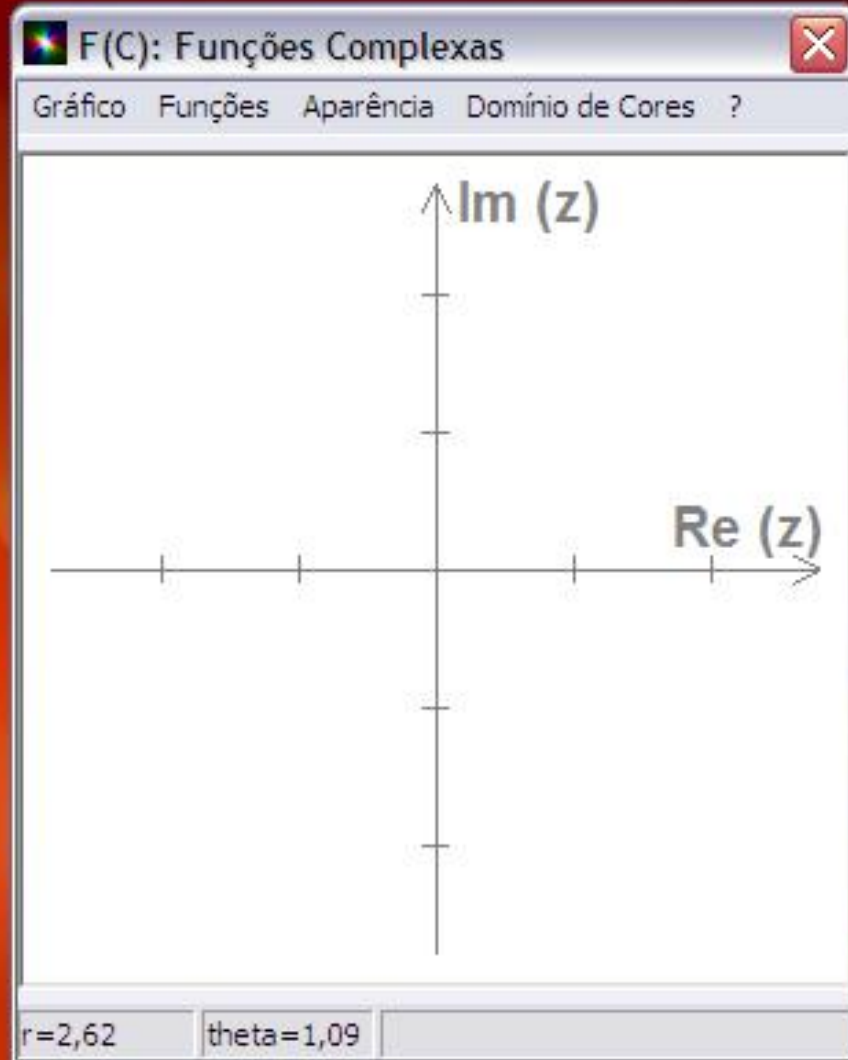
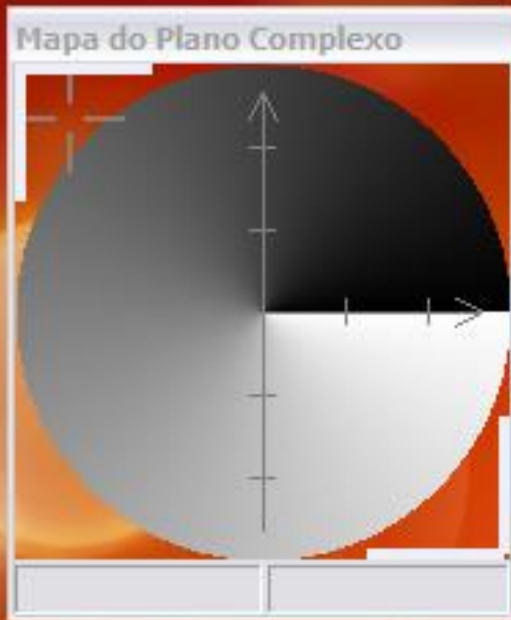
Comando: Domínio de Cores



Comando: Domínio de Cores Mono 1 (Raízes)



Comando: Domínio de Cores Mono 2 (Argumento)



Comando: Ajuda

