Notas de aula do mini-curso
Coloração de Grafos
Escola Latino-Americana de Matemática

Ana Shirley F. Silva
Depto. de Matemática
Grupo ParGO - Paralelismo, Grafos e Otimização
Universidade Federal do Ceará

UFABC - Santo André, SP
Setembro de 2018

Capítulo 1

Introdução

A história do problema de coloração de grafos começou por cerca de 1840, quando Morbiüs conjecturou que qualquer mapa pode ser colorido com no máximo 4 cores de forma que duas regiões que compartilham uma fronteira não possuam a mesma cor. Em 1852, Guthrie, um aluno de De Morgan, fez a mesma conjectura independentemente. Não obtendo êxito sobre sua própria conjectura, Guthrie apresentou o problema a De Morgan, que por sua vez o apresentou a Hamilton. Ambos não obtiveram nenhum sucesso e o problema só aparece novamente em 1879 quando é apresentado por Cayley em uma conferência da "London Mathematical Society". No mesmo ano, Kempe apresentou uma prova para a conjectura que foi mostrada errada apenas 11 anos mais tarde por Heawood. Apesar disso, a prova de Kempe não foi inútil pois introduziu um método de prova poderoso, o Método do Descarregamento, que é utilizado até hoje, principalmente em provas envolvendo grafos com baixa densidade, em especial grafos planares. De fato, este acabou por sendo o método empregado em um relaxamento da conjectura, o Teorema das Cinco Cores provado por Heawood em 1891, e também na prova da própria conjectura. Tal prova foi oferecida apenas em 1976 por Appel e Haken e a conjectura passou a ser chamada de Teorema das 4 Cores. Apesar da prova aplicar um método razoavelmente simples, a prova em si é bastante complexa pois envolve a análise de cerca de 1500 grafos chamados "configurações irredutíveis". Na verdade, esta foi a primeira prova matemática a ser obtida com a ajuda de computadores e ainda hoje não é aceita por alguns matemáticos por ser impossível a um ser humano verificar sua validade. Até hoje a única melhora obtida na prova ocorreu em 1997, quando Robertson, Sanders, Seymour and Thomas diminuiram a quantidade de configurações irredutíveis para 633. Desta forma, como é ainda de se esperar, a prova continua precisando da ajuda de computadores.

O problema de colorir mapas (alternativamente, de colorir grafos planares) foi apenas um pontapé inicial para o estudo das colorações de grafos mais gerais. Dado um grafo $G = (V, E)$, uma coloração própria de G é uma atribuição de cores aos vértices de G de forma que não existem arestas monocromáticas (i.e., para todo $uv \in E$, a cor de u é diferente da cor de v). No problema de coloração de um grafo G mais tradicional, quer-se obter a menor quantidade de cores com as quais é possível colorir propriamente os vértices de G; esse valor é chamado o *número cromático de G* e é representado por $\chi(G)$.

Desde os primeiros estudos acerca de coloração de mapas, são inúmeros os resultados publicados acerca do problema de colorir um grafo, gerando novas áreas de pesquisa, assim como novos métodos de abordagem de problemas. Como exemplos, citamos a introdução do conceito de polinômio cromático por Birkhoff em 1912, mais tarde generalizado por Tutte e que se mostrou ser uma importante estrutura na Teoria dos Grafos Algébrica. Citamos também a rica teoria desendolvida na investigação da Conjectura dos Grafos Perfeitos proposta por Berge em 1960. Além disso, na Teoria da Complexidade Computacional, é sabido que o problema de coloração é um dos de mais difícil ataque: está dentre os 21 problemas **NP**-completos de Karp [16], não admite aproximação com fator $n^{1-\epsilon}$, para todo ϵ [22], e não é possível decidir se $\chi(G) \leq k$ em tempo inferior a $O((k-\epsilon)^t \cdot poly(n))$ para todo ϵ, onde t é a largura em árvore do grafo [18]. Podemos também falar do famoso Teorema de Erdős-Stone-Simonovits que diz que, para um grafo fixo G, a densidade máximo de um grafo que não contem G é uma função do número cromático de G [8].

Mencionamos ainda que, além de se relacionar com outros problemas teóricos e de motivar a criação de tantas outras áreas de pesquisa em teoria dos grafos, o problema de coloração possui um enorme número de variações, fato que pode ser comprovado pela existência de vários livros sobre o tema, além também de servir de modelo para vários problemas práticos. Para citar apenas alguns exemplos, serve de modelo para problemas de alocação de frequência, escalonamento, clusterização, etc, sendo estes três também modelos já bastante genéricos para outros problemas práticos. Neste mini-curso, apresentaremos alguns dos principais resultados existentes sobre coloração de grafos. A escolha foi feita levando em consideração o básico visto sobre o tema em um curso de Teoria dos Grafos, com alguns poucos tópicos adicionais.

Capítulo 2

Conceitos básicos

Um *grafo*[1] é um par ordenado (V, E) onde V é um conjunto não-vazio, chamado de *conjunto de vértices*, e E é um multiconjunto de pares ordenados em $V \times V$, chamado de *conjunto de arestas*. Em geral, se G é um grafo, denotamos por $V(G)$ e $E(G)$ estes conjuntos. Nesta apostila, trabalharemos somente com grafos finitos. O grafo $(\{u\}, \emptyset)$ é chamado de grafo *trivial*, e um grafo do tipo $(V, \emptyset)$ é dito *vazio*.

Um *laço* é uma aresta do tipo (u, u), enquanto que uma aresta é *múltipla* se ocorre mais de uma vez em E. Muitas vezes, a ordem dos pares ordenados em E não é importante. Para fazer esta distinção, fala-se de *grafos direcionados* (ou digrafos) e de *grafos não-direcionados*. Um grafo não-direcionado é dito *simples* se não possui laços ou arestas múltiplas. Neste caso, podemos também enxergar E como sendo uma família de subconjuntos de V de tamanho exatamente dois. Além disso, escrevemos uv para denotar uma aresta $\{u, v\}$.

Seja G um grafo qualquer. Se $e = (u, v) \in E(G)$, dizemos que u e v são *adjacentes* ou que são *vizinhos*. Diz-se ainda que a aresta e é *incidente* a u e a v, e que u e v são as *extremidades* de e. Se $e, e' \in E(G)$ possuem uma extremidade em comum, dizemos também que são *arestas adjacentes*. Isto é, adjacência é uma relação entre elementos de mesmo tipo, enquanto incidência, de tipos diferentes. A *vizinhança* de um vértice u é o conjunto $N(u)$ contendo os vizinhos de u, e seu *grau* é igual à quantidade de arestas incidentes em u e é denotado por $d(u)$. A *vizinhança fechada de u* é o conjunto $N[u] = N(u) \cup \{u\}$. Observe que se G é um grafo sem arestas múltiplas, então $d(u) = |N(u)|$. O *grau máximo de G* é o valor $\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} d(v)$, enquanto que o *grau mínimo de G* é $\delta(G) = \min_{v \in V(G)} d(v)$.

Um grafo H é *subgrafo* de G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Dado um subconjunto $X \subseteq V(G)$, o *subgrafo induzido por X* é dado por $G[X] = (X, E')$ onde $uv \in E'$ se e somente se $u, v \in X$ e $uv \in E(G)$. Além disso, $N(X)$ denota o conjunto $(\bigcup_{v \in X} N(v)) \setminus X$ e $N_X(v)$ denota o conjunto $N(v) \cap X$.

Dado um grafo simples G, o *complemento* de G é o grafo $\overline{G} = (V(G), E')$, onde $uv \in E'$ se e somente se $uv \notin E(G)$. Ao longo destas notas de aula, iremos tratar quase sempre de grafos simples e, por isso, algumas vezes omitimos a palavra "simples". No caso em que grafos mais gerais puderem ser considerados, será especificado.

[1] Seguimos a notação adotada por Douglas West [31].

Um grafo simples G é *completo* se $\overline{G}$ é vazio; denota-se o grafo completo com n vértices por K_n. Um subconjunto $X \subseteq V(G)$ é uma *clique* de G se $G[X]$ é completo, e é um *conjunto estável* (ou conjunto independente) se $G[X]$ é vazio. O tamanho da maior clique de G é denotado por $\omega(G)$, enquanto que o tamanho do maior conjunto independente de G é denotado por $\alpha(G)$.

Dado um grafo G, um *caminho* em G é uma sequência de vértices $(v_1, \ldots, v_p)$ tal que $v_i v_{i+1} \in E(G)$ para todo $i \in \{1, \ldots, p-1\}$. Os vértices v_1 e v_p são as *extremidades* do caminho, e também escrevemos um v_1, v_p-caminho. Se além disso $v_1 = v_p$, tem-se um *ciclo* em G. Representamos o caminho com k vértices por P_k e o ciclo com k vértices por C_k. Um grafo não-direcionado é *conexo* se possui um u, v-caminho para todo par $u, v \in V(G)$; caso contrário, o grafo é *desconexo*.

Um grafo acíclico e conexo é chamado de *árvore*, enquanto que um grafo acíclico é chamado de *floresta*.

Um grafo H é uma *subdivisão* de G se pode ser obtido de G pela subdivisão de arestas, ou seja, pela substituição de arestas de G por caminhos. Por exemplo, qualquer ciclo é uma subdivisão do C_3. Também escrevemos G-subdivisão.

Uma *k-coloração própria de G* (daqui em diante, chamada somente k-coloração) é uma partição de $V(G)$ em k conjuntos independentes. Alternativamente, é uma função $f : V(G) \to \{1, \ldots, k\}$ tal que $f(u) \neq f(v)$ para toda aresta $uv \in E(G)$. Dizemos que G é *k-colorível* se existe uma k-coloração de G. O *número cromático de G* é o menor valor k para o qual G é k-colorível; é denotado por $\chi(G)$. Se $\chi(G) = k$, dizemos que G é *k-cromático*.

Um grafo G é *crítico* se $\chi(H) < \chi(G)$ para todo subgrafo H de G, H próprio. Se $\chi(G) = k$, também diz-se que G é k-crítico.

Um grafo G é dito *bipartido* se $V(G)$ pode ser particionado em A, B de maneira que $G[A]$ e $G[B]$ são conjuntos independentes. Dados inteiros positivos n e m, o grafo bipartido completo $K_{n,m}$ tem como vértices os conjuntos $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$, e como arestas todo par (v_i, u_j), $i \in \{1, \ldots, n\}$ e $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Dado um grafo G, um *emparelhamento de G* é um subconjunto de arestas $M \subseteq E(G)$ tal que as arestas de M não compartilham extremidades, isto é, $e \cap e' = \emptyset$, para todo par $e, e' \in M$, $e \neq e'$. Sendo $V(M) = \bigcup_{e \in M} e$ (conjunto de vértices que é extremidade de alguma aresta de M), dizemos que $u \in V(M)$ é *saturado por M*, ou que *M satura u*. Um emparelhamento M é *perfeito* se $V(M) = V(G)$. O tamanho de um emparelhamento máximo de G é denotado por $\alpha'(G)$.

Um grafo é *k-regular* se $d(u) = k$ para todo $u \in V(G)$. Algumas vezes usamos somente *regular*, ficando $k = \Delta(G)$ implícito.

Um *buraco* é um ciclo induzido de tamanho pelo menos quatro. É *ímpar* se possui uma quantidade ímpar de vértices.

Capítulo 3

Limitantes e subdivisões

Observe que se C é uma clique de um grafo G, então os vértices de C possuem cores distintas em qualquer coloração de G. Além disso, como uma coloração também pode ser vista como um particionamento dos vértices de G em conjuntos independentes, o segudo limite superior na proposição abaixo vale.

Proposição 1 *Seja G um grafo simples. Então, $\chi(G) \geq \omega(G)$ e $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$.*

Sabemos que um grafo G é bipartido se e somente se G é 2-colorível, ou seja, alternativamente G é bipartido se e somente se é 2-colorível. Como sabemos que G é bipartido se e somente se não possui ciclos ímpares, vemos que um primeiro exemplo de grafo onde o primeiro limite inferior acima não é apertado é justamente o ciclo C_{2k+1}, com $k \geq 2$. Na verdade, mais adiante veremos que a distância entre $\chi(G)$ e $\omega(G)$ pode ser arbitrariamente alta. Como exercício, pense em um exemplo de grafo para o qual o segundo limite inferior acima também não é apertado. Na próxima seção, veremos como utilizar uma heurística de coloração para obter um limite superior.

3.1 Teorema de Brooks

Dado um grafo G e uma ordem $(v_1, \ldots, v_n)$ de seus vértices, o *algoritmo guloso* obtem uma coloração de G da seguinte maneira: atribui-se a cor 1 para v_1; em seguida, para cada $i \in \{2, \ldots, n\}$, atribui-se a menor cor c que não ocorre em $N(v_i)$. É fácil perceber que o limite superior abaixo segue da aplicação deste algoritmo.

Proposição 2 *Para todo grafo G, tem-se $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Agora, observe que se uma ordem mais conveniente é dada, talvez o limite superior acima possa ser melhorado (ver Exercício 2). O Teorema de Brooks nos diz que, de fato, o limite superior dado só é apertado em casos bem particulares.

Teorema 1 *Seja G um grafo conexo. Então $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ se e somente se G é completo ou um ciclo ímpar.*

3.2 Grafos com número cromático alto

Como mencionado anteriormente, o limite inferior de $\omega(G)$ para $\chi(G)$ pode ser muito ruim. Em 1959, Erdös apresentou uma prova probabilística da existência de grafos com cintura e número cromático arbitrariamente grandes (a cintura de um grafo é o tamanho do menor ciclo neste grafo), mas apenas em 1968 uma construção explícita foi apresentada [19]. Aqui, por questões de simplicidade, veremos apenas uma construção de grafos sem triângulos com alto número cromático. Tal construção é conhecida como *Construção de Mycielski* e funciona como segue: dado um grafo G com vértices $\{v_1, \dots, v_n\}$, obtemos $M(G)$ a partir de G adicionando um conjunto estável $U = \{u_1, \dots, u_n\}$, um vértice w, fazendo w ser adjacente a todo $u_i \in U$, e fazendo u_i ser adjacente a todo $v_j \in N(v_i)$. A figura abaixo apresenta o Mycielski do K_2, que se trata do C_5. O Mycielski do C_5 é conhecido como *Grafo de Grotzch* (Exercício 3).

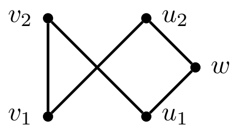

Figura 3.1: Mycielski do K_2.

Teorema 2 (Mycielski[23]) *Se G é um grafo k-cromático livre de triângulos, então $M(G)$ é um grafo $(k+1)$-cromático livre de triângulos.*

3.3 Subdivisões

Vimos então que proibir cliques não limita o número cromático de um grafo. Porém, o teorema a seguir nos diz que de alguma forma uma clique de tamanho 4 está contida em todo grafo com número cromático ao menos 4.

Teorema 3 (Dirac [5]) *Se $\chi(G) \geq 4$, então G possui uma subdivisão de K_4 como subgrafo.*

Observe que o análogo para $\chi(G) \geq k$ e K_k com $k \in \{2, 3\}$ é trivial. Uma pergunta natural então é se o Teorema de Dirac pode ser generalizado para $k \geq 5$, e de fato isso foi conjecturado por Hajós em 1961. Tal conjectura foi provada falsa para $k \geq 7$ [2], porém ainda hoje não se tem uma resposta para $k \in \{5, 6\}$. Uma versão mais fraca já havia sido proposta por Hadwiger, a de que todo grafo k-cromático possui K_k como *menor*. A versão para $k = 4$ é equivalente ao Teorema de Dirac, a versão para $k = 5$ é equivalente ao Teorema das 4 Cores e versão para $k = 6$ foi provada por Roberston, Thomas e Seymour utilizando o Teorema das 4 Cores [26]. Até hoje a conjectura permanece em aberto para $k \geq 7$.

3.4 Exercícios

1. Prove que se G é bipartido conexo, então a 2-coloração de G é única, a menos de rerotulamento de cores.

2. Prove que se G é tal que todo par de ciclos ímpares tem interseção, então $\chi(G) \leq 5$.

3. Prove que todo grafo possui uma ordem de seus vértices que gera uma coloração ótima quando aplicado o algoritmo guloso.

4. Apresente uma árvore e uma ordem dos vértices desta árvore que produz uma coloração com mais de 2 cores. Tente generalizar sua construção para obter árvores onde o algoritmo guloso produz uma coloração com uma quantidade arbitrária de cores.

5. Prove que $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq |V(G)| + 1$. (Nordhauss-Gaddum [24])

6. Se a sequência de graus de G é $(d_1, \ldots, d_n)$, com $d_i \geq d_{i+1}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, então $\chi(G) \leq 1 + \max_i \min\{d_i, i-1\}$.

7. Faça o Mycielski do C_5, conhecido como o Grafo de Grotzch.

8. Prove que se G é crítico, então $M(G)$ (Mycielski de G) também o é.

9. Seja $G_1 = K_1$ e, para cada $k \geq 2$, construa G_k como segue. Comece com a união disjunta $G_1 \vee \ldots G_{k-1} \vee T$, onde T é um conjunto independente de tamanho $\Pi_{i=1}^{k-1} |V(G_i)|$. Em seguida, para cada escolha de $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$, onde $v_i \in V(G_i)$ para todo $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, faça um vértice de T adjacente a $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$. Prove que G_k não possui triângulos e que $\chi(G_k) = k$ (Zykov [32]).

10. Seja H obtido a partir de 5 triângulos, $T_0, \ldots, T_4$, fazendo todo vértice de T_i adjacente a todo vértice de $T_{(i+1) \bmod 5}$, para cada $i \in \{0, \ldots, 4\}$; e seja G o grafo obtido de H removendo um vértice de T_1 e um vértice de T_4. Prove que $\chi(G) = 7$ e que G não tem subdivisão de K_7, e que $\chi(G) = 8$ e que H não tem subdivisão de K_8.

Capítulo 4

Coloração de grafos planares

A coloração de grafos planares é provavelmente um dos primeiros problemas de teoria dos grafos a ser investigado. A história do famoso Teorema das 4 Cores, que nos diz que um grafo planar possui número cromático no máximo 4, começou por volta de 1840 e passou por muitas provas que, apesar de erradas, deram origem às mais variadas técnicas e pesquisas em grafos, dentre elas o simples e poderoso método da descarga. Uma prova correta foi encontrada apenas em 1976 por Kenneth Appel e Wolfgang Haken e foi a primeira prova matemática obtida com a ajuda de computadores, motivo pelo qual alguns matemáticos ainda não a aceitam. Aqui, veremos a prova de um teorema mais simples, provado por Heawood em 1891 após ter refutado uma prova fornecida por Kempe em 1879. Mas antes precisamos de um lema obtido a partir da fórmula de Euler.

Teorema 4 (Euler [10]) *Seja G um grafo plano conexo com n vértices, m arestas e f faces. Então:*

$$n - m + f = 2.$$

Lema 1 *Se G é um grafo planar simples com ao menos 3 vértices, então:*

$$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6.$$

Teorema 5 (Teorema das 5 cores, Heawood [13]) *Se G um grafo planar, então $\chi(G) \leq 5$.*

Uma bonita generalização do teorema acima fala de coloração por listas. Dado um grafo G e uma atribuição de listas aos vértices de G, $L : V(G) \to \mathbb{N}$, dizemos que $f : V(G) \to \mathbb{N}$ é uma L-coloração de G se $f(u) \neq f(v)$ para toda aresta $uv \in E(G)$, e $v \in L(v)$ para todo $v \in V(G)$. Se tal coloração existe, dizemos que G é *L-colorível.* Além disso, dizemos que G é *k-lista-colorível* se G é L-colorível para toda escolha de listas L onde $|L(v)| \leq k$ para todo $v \in V(G)$.

Em 1975, Vizing pergunta se todo grafo planar é 5-lista-colorível [1], enquanto que em 1979, Erdős et.al. conjecturam que todo grafo planar é 5-lista-colorível e que isso é o melhor valor possível [7]. Apenas em 1993 é que Voigt apresenta o primeiro grafo planar que não é 4-lista-colorível, provando que de fato 5 seria o melhor valor possível [30], enquanto que Thomassen [28] apresenta uma prova que certamente merce estar no "livro de Deus" devido à sua simplicidade (o artigo possui apenas duas páginas). O truque da prova é reduzir o grafo de maneira conveniente.

Um grafo plano é um *quase triangulado* se toda face externa é um triângulo, com exceção da externa. Nós mostramos o seguinte lema, que implica o teorema de maneira trivial.

Lema 2 *Seja G quase triangulado 2-conexo, $|V(G)| \geq 3$. Sejam x, y vértices adjacentes pertencentes à face externa e seja L uma atribuição de listas tal que:*

1. $|L(x)| = |L(y)| = 1$;

2. $L(x) \neq L(y)$;

3. *Para todo vértice v na face externa diferente de x e y, tem-se $|L(v)| \geq 3$; e*

4. *Para todo outro vértice v, tem-se $|L(v)| \geq 5$.*

Então G é L-colorível.

Prova: Seja C o conjunto de vértices na face externa. Como G é 2-conexo, sabemos que C é um ciclo. A prova é por indução em $|V(G)|$. Se $|V(G)| = 3$, segue trivialmente pois $|L(w) \setminus (L(x) \cup L(y)| \geq 1$, onde $w \in V(G) \setminus \{x, y\}$. Para o passo indutivo, consideramos os casos abaixo:

- C possui uma corda uv: sejam P_1, P_2 os u, v-caminhos definidos por C, e assuma sem perda de generalidade que $x, y \in V(P_1)$. Seja G_i o subgraph induzido de G tendo $P_i + uv$ como face externa, para $i = 1$ e $i = 2$. Observe que G_1 e G_2 são não-vazios. Por hipótese de indução, seja f uma L-coloração de G_1. Definindo $L'(u)$ como $\{f(u)\}$, $L'(v)$ como $\{f(v)\}$, e $L'(w)$ como $L(w)$ para todo $w \in V(G_2) \setminus \{u, v\}$, como $x, y \notin V(G_2)$, podemos aplicar a hipótese de indução também em G_2;

- C não possui cordas: sejam $w \in N_C(x) \setminus \{y\}$ e $v \in N_C(w) \setminus \{x\}$ (note que v pode ser igual a y). Como C não possui cordas, temos que $N_C(w) = \{x, v\}$, e como G é quase-triangulado, existe um caminho $P = (x, u_1, \ldots, u_q, v)$ tal que $N(w) = V(P)$. Observe que $q \geq 1$ e seja $G' = G - w$. Sejam ainda c, d duas cores distintas em $L(w) \setminus L(x)$. Seja L' uma atribuição de listas obtida pela remoção de c, d das listas de cada $u_i \in V(P)$. Por hipótese de indução, seja f uma L'-coloração de G'. Como $c, d \notin L(x)$, é possível escolher uma cor em $\{c, d\} \setminus \{f(v)\}$ com a qual podemos colorir w.

□

Existem ainda muitos problemas em aberto relacionados a coloração por listas. Dentre eles, citamos a Conjectura de Aresta-Coloração por Listas, que diz que $\chi'(G) = \chi'_L(G)$. Sabe-se que esta conjectura vale para grafos bipartidos completos [11].

4.1 Exercícios

1. Prove que todo grafo planar pode ser decomposto em dois grafos bipartidos, i.e., que o conjunto de arestas de G pode ser particionado em E, E' de forma que $(V(G), E)$ e $(V(G), E')$ sejam bipartidos.

2. Um grafo é *periplanar* se é um grafo planar que possui uma representação no plano onde todos os vértices estão na face externa. Sem usar o Teorema das 4 Cores, prove que todo grafo periplanar é 3-colorível.

3. Prove que o conjunto dos vértices de um grafo periplanar pode ser particionado em dois conjuntos V, V' tais que $G[V]$ e $G[V']$ são florestas lineares (florestas de caminhos).

4. O menor valor k para o qual G é k-lista-colorível é chamado de *número lista-cromático de* G ou *número de escolha de* G, e é denotado por $\chi_L(G)$. Prove que:

   (a) $\chi_L(G) \leq 1 + \max\{\delta(H) : H \subseteq G\}$;

   (b) $\chi_L(G) \leq \Delta(G)$, a menos que G seja o grafo completo ou o ciclo ímpar.

5. Forneça um exemplo de grafo bipartido que não é 2-lista-colorível.

6. Prove que todo ciclo par é 2-lista-colorível.

Capítulo 5

Coloração de arestas

O *grafo linha* de um grafo G é o grafo $L(G) = (E(G), E')$ onde $ee' \in E'$ se e somente se e, e' compartilham uma extremidade em G. A classe dos grafos linha contem todos os grafos que são imagem de algum grafo na aplicação desta operação. Sabe-se que podem ser caracterizados por um conjunto de nove subgrafos proibidos, dentre eles a garra (grafo bipartido completo $K_{1,3}$). Existe também interesse no problema de colorir as arestas de um grafo, o que é equivalente a colorir os vértices de um grafo linha. Neste contexto, fala-se de coloração de arestas e de índice cromático. Mais formalmente, uma *k-coloração de arestas* de G é uma função $f : E(G) \to \{1, \ldots, k\}$ tal que $f(e) \neq f(e')$ para todo par $e, e' \in E(G)$ de arestas adjacentes, enquanto que o *índice cromático de G* é o menor inteiro k para o qual existe uma k-coloração de arestas de G; é denotado por $\chi'(G)$.

Observe que, como todas as arestas incidentes em um vértice precisam ter uma cor distinta, tem-se que $\chi'(G) \geq \Delta(G)$. O primeiro teorema que veremos diz que isto é suficiente quando G é bipartido. Para provar isso, será necessário falar de emparelhamentos de grafos bipartidos (mais especificamente, de grafos regulares). O teorema a seguir é provavelmente um dos teoremas mais conhecidos e importante da Teoria dos Grafos.

Teorema 6 (Teorema de Hall[25]) *Seja $G = (X \cup Y, E)$ um grafo bipartido. Existe um emparelhamento que satura X se e somente se $|S| \leq |N(S)|$, para todo $S \subseteq X$.*

Usando o Teorema de Hall, é possível provar que todo grafo bipartido k-regular possui um emparelhamento perfeito. Isto será utilizado na prova do teorema a seguir.

Teorema 7 (König[17]) *Se G é bipartido, então $\chi'(G) = \Delta(G)$.*

Um resultado surpreendente, provado independentemente por Vizing e Gupta, mas mais conhecido como o Teorema de Vizing, é de que no máximo $\Delta(G) + 1$ cores é sempre suficiente.

Teorema 8 (Vizing[29], Gupta[12]) *Se G é um grafo simples, então*

$$\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Temos então que, para todo grafo G, o valor de $\chi'(G)$ é $\Delta(G)$ ou $\Delta(G)+1$. Mesmo assim, é **NP**-completo decidir qual é o valor correto [15]. A classe de grafos que possui índice cromático igual ao grau máximo é chamada de *Classe 1*, enquanto os demais são *Classe 2*. Na tentativa de provar o Teorema das 4 cores, Tutte desenvolveu uma bonita teoria onde prova que o problema é equivalente provar que os grafos planares cúbicos (3-regulares) são Classe 1.

Observe que se G não é um grafo simples, então o limitante acima não vale. Para isso, basta considerar o grafo formado por um triângulo onde cada aresta tem multiplicidade k: como todas as arestas são adjacentes entre si, precisamos de $3k$ cores para colorir, enquanto que $\Delta(G) = 2k$. Sabe-se porém que este é o pior exemplo, isto é, que $\chi'(G) \leq \frac{3}{2}\Delta(G)$ quando G é um multigrafo [27]. É importante enfatizar também que o teorema acima na verdade é mais geral e prova que $\chi'(G) \leq \Delta(G) + \mu(G)$, onde $\mu(G)$ é a maior multiplicade de uma aresta.

Observe ainda que se $H \subseteq G$ é tal que $\frac{2|E(H)|}{|V(H)|-1} > \Delta(G)$, então $\Delta(G)$ cores não serão suficientes para colorir todas as arestas de H (Exercício 4). Neste caso, diz-se que H é um *subgrafo overfull* de G. Uma famosa conjectura em aberto é a Conjectura Overfull que, se $\Delta(G) > \frac{|V(G)|}{3}$, então conter um subgrafo overfull é também uma condição necessária para que G seja Classe 2. Esta conjectura foi proposta por Chetwynd e Hilton em 1986 [3].

5.1 Exercícios

1. Dado um grafo G, uma *cobertura de vértices de* G é um subconjunto $S \subseteq V(G)$ tal que $G - S$ é vazio (isto é, toda aresta de G possui uma extremidade em S), enquanto que uma *cobertura de arestas de* G é um subconjunto $S' \subseteq E(G)$ tal que $V(S') = V(G)$ (isto é, todo vértice é extremidade de uma aresta em S'). O tamanho mínimo de uma cobertura de vértices é denotado por $\beta(G)$, e de uma cobertura de arestas por $\beta'(G)$. O valor $\beta'(G)$ é sempre definido?

2. Prove que para todo grafo G, tem-se $\alpha(G) + \beta(G) = |V(G)|$ e, se G não possui vértices isolados. $\alpha'(G) + \beta'(G) = |V(G)|$. Esta última igualdade foi provada por Gallai em 1959.

3. Prove ou desprove: toda árvore possui no máximo um emparelhamento perfeito.

4. Prove que se G possui um subgrafo overfull, então $\chi'(G) > \Delta(G)$.

5. Sejam G e H grafos não triviais. O *produto cartesiano de* G *e* H é o grafo $G \,\square\, H = (V(G) \times V(H), E')$, onde $(ux, vy) \in E'$ se e somente se $u = v$ e $xy \in E(H)$, ou $x = y$ e $uv \in E(G)$. Usando o Teorema de Vizing, prove que se $\chi'(H) = \Delta(H)$, então $\chi'(G \,\square\, H) = \Delta(G \,\square\, H)$.

6. Seja G um grafo regular. Prove que se G possui um vértice de corte (vértice u tal que $G-u$ possui mais componentes do que G), então $\chi'(G) > \Delta(G)$.

7. Prove que o Grafo de Petersen não possui subgrafo overfull. Observe que isso nos diz que a condição sobre o grau máximo na Conjectura Overfull é apertada.

Capítulo 6

Grafos Perfeitos

Na Seção 3.2, mostramos uma construção que leva a grafos sem triângulo e com número cromático arbitrariamente grande. Mencionamos também que é possível construir grafos com cintura e número cromático arbitrariamente grandes. Sabe-se que ter cintura alta significa ser localmente semelhante a uma árvore; por exemplo, se G possui cintura ao menos 10, então conclui-se que para todo vértice $v \in V(G)$, o conjunto de vértices à distância no máximo 9 de v induz uma árvore em G. Desta forma, o resultado acerca do número cromático e da cintura de um grafo nos diz que o número cromático é dependente de aspectos globais do grafo, não de aspectos locais, como por exemplo, tamanho da maior clique. Uma pergunta interessante, então, seria entender que tipo de grafo tem número cromático dependente de aspectos locais, por exemplo, entender como é um grafo G tal que $\chi(G) = \omega(G)$. Apesar de não fazer parte do escopo deste mini-curso, mencionamos que descrever estes grafos é um problema **NP**-completo. Uma alternativa então é estudar a classe dos grafos perfeitos, introduzida por Berge em 1960.

Um grafo G é *perfeito* se $\chi(H) = \omega(H)$ para todo subgrafo induzido H de G. Apesar de parecer uma definição muito estrita, a classe dos grafos perfeitos contém muitos grafos e seu estudo envolve uma série de problemas interessantes, como a decomposição de grafos em grafos menores, mais estruturados.

Uma conjectura de caracterização para esta classe, feita por Berge em 1961, ficou em aberto por mais de 40 anos até ser provada por Chudnovsky, Robertson, Seymour e Thomas. Ela era conhecida como a Conjectura Forte dos Grafos Perfeitos e agora é chamada de Teorema Forte dos Grafos Perfeitos. Sua prova pode ser encontrada na plataforma arxiv e possui 150 páginas; aqui iremos apresentar somente seu enunciado.

Teorema 9 (Teorema Forte dos Grafos Perfeitos [4]) *Um grafo G é perfeito se e somente se nem G nem $\overline{G}$ possui um buraco ímpar.*

O motivo pelo o qual a conjectura recebeu esse nome é que Berge à época também propôs uma outra conjectura, a qual ele chamou de fraca, e que foi provada em 72 por Lovász. Veremos a prova deste teorema em sala.

Teorema 10 (Teorema dos Grafos Perfeitos [20]) *Um grafo G é perfeito se e somente se $\overline{G}$ também o é.*

Um grafo G é *cordal* se é livre de buracos. Pelo Teorema Forte dos Grafos Perfeitos, segue que todo grafo cordal é perfeito. Porém, isso não nos fornece nenhuma informação adicional acerca de G, ou de como colorir G. Veremos agora uma outra prova que nos permite obter uma coloração ótima de G quando G é cordal. Primeiro, observe que a seguinte proposição vale trivialmente. Uma classe de grafos $\mathcal{G}$ é dita *hereditária* se é fechada sob a tomada de subgrafos induzidos, isto é, se sempre que $G \in \mathcal{G}$, tem-se que $H \in \mathcal{G}$ para todo subgrafo induzido H de G.

Proposição 3 *Se $\mathcal{G}$ é uma classe de grafos hereditária tal $\chi(G) = \omega(G)$ para todo $G \in \mathcal{G}$, então todo $G \in \mathcal{G}$ é perfeito.*

Como a classe dos grafos cordais é hereditária por definição, para provar que todo grafo cordal é perfeito, basta provar que $\chi(G) = \omega(G)$ quando G é cordal. Para isso, usamos os conceitos a seguir.

Um vértice é *simplicial* se $N(v)$ é uma clique. Uma *ordem de eliminação perfeita de G* é uma ordem $(v_1, \ldots, v_n)$ de $V(G)$ tal que v_i é simplicial em G_i, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, onde G_i é o subgrafo induzido por $\{v_1, \ldots, v_i\}$. De maneira interessante, a existência de tais ordens definem a classe dos grafos cordais.

Teorema 11 (Dirac [6]) *Um grafo possui uma ordem de eliminação perfeita se e somente se é cordal.*

Agora, para mostrar que G cordal é tal que $\chi(G) = \omega(G)$, basta aplicar o algoritmo guloso em uma ordem de eliminação perfeita $(v_1, \ldots, v_n)$. Vemos que um vértice v_i receberá cor no máximo $d_{G_i}(v_i) + 1$. Como cada v_i é simplicial em G_i, ou seja $N_{G_i}[v_i]$ é uma clique de G, temos que esse valor é no máximo $\omega(G)$. O resultado segue pois $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Citamos ainda uma outra importante subclasse dos grafos perfeitos, a classe dos grafos livres de P_4, também chamada de cografos. Dados grafos G_1 e G_2, a *união de G_1 e G_2* é o grafo $G_1 \cup G_2 = (V(G_1) \cup V(G_2), E(G_1) \cup E(G_2))$, e a *junção de G_1 e G_2* é o grafo obtido de $G_1 \cup G_2$ pela adição de todas as arestas possíves entre $V(G_1)$ e $V(G_2)$. Sabe-se que um grafo G é um cografo se e somente se G é a união ou a junção de dois outros cografos. No exercício 1, é pedido para que prove que esta classe está contida na classe dos grafos perfeitos.

6.1 Exercícios

1. Prove que todo cografo é um grafo perfeito.

2. Seja G um grafo cordal. Use uma ordem de eliminação perfeito de G para provar:

   (a) G tem no máximo n cliques, com igualdade se e somente se G é vazio; e

   (b) Toda clique maximal C de G que não contem um vértice simplicial é tal que $G - C$ tem mais componentes do que G.

Professor	**Afirmou que viu**	
Alice (A)	Bernardo (B)	Esmeralda (E)
Bernardo (B)	Alice (A)	Fernando (F)
Cássio (C)	Diana (D)	Fernando (F)
Diana (D)	Alice (A)	Fernando (F)
Esmeralda (E)	Bernardo (B)	Cássio (C)
Fernando (F)	Cássio (C)	Esmeralda (E)

Tabela 6.1: Testemunhos.

3. Prove que se S é um ciclo em um grafo cordal G, então G possui um ciclo cujo conjunto de vértices é $S - u$ para algum u. (Hendry conjecturou que, se G possui um ciclo hamiltoniano e $S \subset V(G)$, então G possui um ciclo cujo conjunto de vértices é $S + u$ para algum u [14])

4. Um grafo é de *intervalo* se é o grafo de interseção de intervalos da reta, e é de *comparabilidade* se admite uma orientação transitiva de suas arestas. Prove que se G é de intervalo, então G é cordal e $\overline{G}$ é de comparabilidade.

5. Se utilizando apenas das definições, prove que todo grafo de intervalo e que todo grafo de comparabilidade é perfeito.

6. Prove que se G é perfeito, então $V(H) \leq \alpha(H) \cdot \omega(H)$ para todo subgrafo induzido H de G. Sabendo que a recíproca também é válida [21], prove o Teorema 10.

7. (Esta questão foi retirada das notas de aula do curso em Teoria dos grafos fornecido pela Professora Yoshiko Wakabayashi [9])
   Seis professores visitaram a biblioteca num dia em que um livro raro foi roubado. Cada um entrou uma vez, ficou por um tempo, e depois saiu. Para cada dois deles que estiveram na biblioteca ao mesmo tempo, pelo menos um deles viu o outro. Detetives interrogaram os professores e colheram os testemunho representados na Tabela 6.1:

   Nesta situação, *mentir* significa dar uma informação falsa, mas não significa omitir uma informação. Suponha que *o culpado tentou colocar a culpa em outro mentindo.* Se um professor mentiu, quem foi?

Referências Bibliográficas

[1] *T.R. Jensen and B. Toft.* Wiley Online Library, 2011.

[2] P. Catlin. Hajós graph-coloring conjecture: variations and counterexamples. *J. Comb. Theory B*, 26(268–274), 1979.

[3] A. Chetwynd and A. Hilton. Star multigraphs with 3 vertices of maximum degree. *Math. Proc. Cambridge Math. Soc.*, 100:303–317, 1986.

[4] M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour, and R. Thomas. The strong perfect graph theorem. *Annals of Mathematics*, 164(1):51–229, 2006.

[5] G. Dirac. A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs. *J. Lond. Math. Soc.*, 27(85–92), 1952.

[6] G. Dirac. On rigid circuit graphs. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 25:71–76, 1961.

[7] P. Erdős, A. Rubin, and H. Taylor. Choosability in graphs. In *West Coast Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing*, 1979.

[8] P. Erdős and M. Simonovits. A limit theorem in graph theory. *STUDIA SCI. MATH. HUNG*, 1(51–57), 1965.

[9] Y. W. et. al. *Um curso de grafos.* IME/USP, 2016.

[10] L. Euler. Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita. *Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petropol*, 4:140–160, 1758.

[11] F. Galvin. Asymptotics of the list chromatic index for multigraphs. *Random Structures and Algorithms*, 17(2):117–156, 1995.

[12] R. Gupta. The chromatic index and the degree of a graph. *Not. Amer. math Soc.*, 13:719, 1966.

[13] P. Heawood. Map-colour theorem. *Q.J. Math*, 24:332–339, 1890.

[14] G. Hendry. Extending cycles in graphs. *Discrete Math.*, 85:59–72, 1990.

[15] I. Holyer. The np-completeness of edge-coloring. *SIAM Journal on Computing*, 10(4):718–720, 1981.

[16] R. M. Karp. *Reducibility among Combinatorial Problems*, pages 85–103. Springer US, Boston, MA, 1972.

[17] D. König. Uber graphen und ihre anwendung auf determinantentheorie und mengenlehre. *Math. Ann.*, 77:453–465, 1916.

[18] D. Lokshtanov, D. Marx, and S. Saurabh. Known algorithms on graphs of bounded treewidth are probably optimal. *ACM Transactions on Algorithms*, 14(2):1–30, 2018.

[19] L. Lovász. On chromatic number of finite set-systems. *Acta Math. Acad. Sci.*, 19:59–67, 1968.

[20] L. Lovász. A characterization of perfect graphs. *J. Comb. Theory B*, 13(2):95–98, 1972.

[21] L. Lovász. Three short proofs in graph theory. *J. Comb. Theory B*, 19(3):269–271, 1972.

[22] C. Lund and M. Yannakakis. On the hardness of approximating minimization problems. *Journal of the ACM*, 41(5):960–981, 1994.

[23] J. Mycielski. Sur le coloriage des graphes. *Coll. Math.*, 3:161–162, 1955.

[24] E. Nordhaus and G. Gaddum. On complementary graphs. *Amer. Math. Monthly*, 63:175–177, 1956.

[25] P.~Hall. On representation of subsets. *J. Lond. Math. Soc.*, 10:26–30, 1935.

[26] N. Robertson, P. Seymour, and R. Thomas. Hadwiger's conjecture for k_6-free graphs. *Combinatorica*, 13:279–361, 1993.

[27] C. Shannon. A theorem on coloring the lines of a network. *J. Math. Phys.*, 28:148–151, 1949.

[28] C. Thomassen. Every planar graph is 5-choosable. *J. Comb. Theory B*, 62:180–181, 1994.

[29] V. Vizing. On an estimate of the chromatic class of a p-graph. *Diskret. Analiz.*, 3:25–30, 1964.

[30] M. Voigt. List colourings of planar graphs. *Discrete Math.*, 120:215–219, 1993.

[31] D. West. *Introduction to Graph Theory.* Pearson, 2000.

[32] A. Zykov. On some properties of linear complexes (russian). *Mat. Sbornik*, 24:163–188, 1949.