

# Análise da eficiência da utilização do kernel Epanechnikov aplicado à Correntropia

Elayne Martins, Aline Neves

CECS, Universidade Federal do ABC, Santo André, Brasil

e-mail: elayne.martins@ufabc.edu.br

**Abstract** – Usually, correntropy is developed using a Gaussian kernel in its formulation. In this article, we introduce the use of another kernel for the correntropy, applied to the problem of equalization. We analyse its performance, comparing with the results obtained using the Gaussian kernel.

**Palavras-chave:** ITL, correntropia, kernel.

## Introdução

A aprendizagem por teoria da informação, (ITL - Information Theoretic Learning) [1] sinergicamente integra o quadro geral da teoria da informação na concepção de novas funções custo para sistemas adaptativos, e tem desempenhado um papel crescente no processamento de sinal adaptativo, resolvendo assim os problemas que os critérios clássicos, como o CMA (Constant Modulus Algorithm) [2], não conseguem resolver.

A principal dificuldade encontrada na utilização de tais critérios é a necessidade de se estimar a função densidade de probabilidade do sinal de saída do canal, o que não é uma operação simples de ser executada, ainda mais em aplicações de tempo real.

Dentro deste contexto, também tivemos a proposta de uma nova medida de correlação generalizada, chamada correntropia [3], que tradicionalmente utiliza em sua formulação um kernel gaussiano. No entanto, dependendo da característica do sinal e do sistema sendo estudado, outros kernels talvez possam levar a um melhor desempenho.

A partir deste contexto, buscando ampliar o estudo destes algoritmos e contribuir com melhorias no desempenho dos mesmos, o estudo propõe uma análise da eficiência da utilização do kernel Epanechnikov aplicado ao critério da correntropia.

A escolha do kernel Epanechnikov para esta análise, se deve ao fato de ser um kernel mais eficiente para a estimação de densidades de probabilidade do que o kernel gaussiano [4]. Neste trabalho, consideramos o contexto de equalização cega para comparar os resultados obtidos através do

uso do kernel Epanechnikov e gaussiano e verificamos que a abordagem pode trazer resultados interessantes.

## Correntropia

A correntropia [3], foi definida como uma função de correlação generalizada (GCF), a qual está diretamente relacionada à estimativa da entropia quadrática de Renyi utilizando janela de Parzen.

Baseado no conceito de que os processos de interesse da engenharia são compostos de duas características básicas, distribuição estatística de amplitudes e estruturas de tempo, a correntropia incorporou ambos os conceitos, uma vez que muitos processos levam em consideração somente um destes aspectos.

A correntropia é definida pela equação:

$$V_A(m) = E [ K_\sigma (A(n) - A(n - m))] \quad (1)$$

onde  $E [ ]$  denota a esperança matemática,  $K_\sigma$  é o kernel,  $A$  indica um processo estocástico e  $m$  o intervalo entre as amostras da variável.

Considerando um processo estocástico de tempo discreto estacionário, a correntropia pode ser estimada usando a equação a seguir, onde  $N - m + 1$  é a quantidade de amostras utilizadas para a estimação:

$$V_A(m) = \frac{1}{N - m + 1} \sum_{n=m}^N K_\sigma (A(n) - A(n - m)) \quad (2)$$

O problema de equalização cega que pretendemos tratar consiste na adaptação de um filtro linear transversal FIR cujo objetivo é reduzir as distorções do sinal recebido que são introduzidas pelo canal. Neste contexto, o receptor só conhece algumas características estatísticas do sinal de entrada.

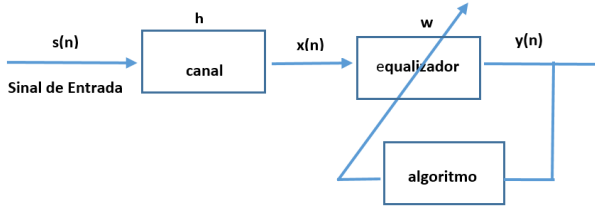


Figura 1: Representação do modelo do sistema em estudo.

O diagrama de blocos representado na figura 1, ilustra o sistema em questão, onde  $s(n)$  é o sinal transmitido, através de um canal de transmissão com resposta ao impulso dada por  $h$ . A informação do sinal original é recuperada através do equalizador implementado como um filtro, com coeficientes dados por  $\mathbf{w}=[w_0 w_1 \dots w_{L-1}]$ . O sinal de saída é representado por  $y(n)$ .

Como, para ajustar os parâmetros  $\mathbf{w}$  do equalizador, só temos acesso ao sinal  $x(n)$  e a algumas características estatísticas de  $s(n)$ , uma função custo baseada na correntropia foi proposta em [3]. Tal função consiste em comparar a correntropia do sinal transmitido com a do sinal recebido da seguinte forma:

$$J_{COR}(\mathbf{w}) = \sum_{m=1}^R (V_s[m] - V_y[m])^2 \quad (3)$$

onde,  $R$  é o número de intervalos,  $V_s$  é a correntropia do sinal transmitido e  $V_y$  é a correntropia do sinal de saída do equalizador  $y(n)$ . Assim, quando  $V_y$  for igual a  $V_s$ , é possível se mostrar que o sistema foi equalizado e  $y(n)$  será o mais próximo possível de  $s(n)$ . A equação de atualização dos coeficientes do equalizador é dada por:

$$w(n+1) = w(n) + \mu \sum_{m=1}^R (V_s[m] - V_y[m]) \frac{\partial V_y[m]}{\partial w} \quad (4)$$

onde o gradiente de  $V_y$  em função de  $\mathbf{w}$  depende da função kernel escolhida e  $\mu$  é o passo de adaptação.

O algoritmo da correntropia, dado por (4), apresenta a particularidade de que é necessário definir a janela de dados, de tamanho  $N$ , usada para se estimar a medida da correntropia, conforme mostrado em (2).

Para o desenvolvimento do estudo, utilizamos dois tipos de kernel para análise do desempenho da

correntropia: o kernel gaussiano, cuja equação é dada por:

$$G(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}} \quad (5)$$

onde  $\sigma$  é o desvio padrão ou a largura do kernel; e o kernel Epanechnikov, dado por:

$$E_\sigma(A) = \frac{3}{4\sigma} \left(1 - \left(\frac{A}{\sigma}\right)^2\right) \quad (6)$$

A largura do kernel, definida por  $\sigma$ , atua como uma lente de aumento, controlando a “janela de observação” na qual a similaridade é acessada, sendo que a janela ajustada provê um mecanismo efetivo para eliminar os efeitos prejudiciais dos valores atípicos. Como em uma janela de Parzen, qualquer kernel simétrico pode ser utilizado na correntropia.

Na sequência, avaliamos o algoritmo dado por (4), calculando as correntropias envolvidas através da equação (2), onde o kernel  $K_\sigma$  foi substituído pelas equações (5) ou (6) para o caso gaussiano e de Epanechnikov respectivamente.

## Resultados

Foram efetuadas simulações com diferentes tipos de sinais. Foram consideradas as seguintes condições para a simulação, utilizando o aplicativo Matlab: consideramos o canal  $h(z) = (0.1856 - 0.9650z^{-1} + 0.1856z^{-2})$  que é um canal de fase mista, uma janela de  $N=100$  amostras para estimação da correntropia e um número de intervalos  $R=5$ . Consideramos um equalizador  $\mathbf{w}$  com 11 coeficientes, com inicialização *center spike*, ou seja, o filtro foi inicializado todo nulo a menos do termo central que é igual a um. As simulações apresentam uma média de 30 execuções dos algoritmos.

Como medida de desempenho foi usada a IIS (interferência intersimbólica), calculada utilizando a definição:

$$IIS = 10_{\log_{10}} \left[ \frac{\sum_n |\theta(n)|^2 - \max_n (|\theta(n)|^2)}{\max_n (|\theta(n)|^2)} \right] \quad (7)$$

onde  $\theta(n)=h*w(n)$ , com  $*$  sendo a convolução da resposta ao impulso dos dois filtros.

Nas legendas das figuras,  $K=G$ , refere-se ao kernel gaussiano e  $K=E$  ao kernel Epanechnikov. As curvas referentes ao desempenho com kernel gaussiano representam o melhor desempenho obtido com tal kernel, dentro do contexto estudado.

A fim de obter uma ampla análise, efetuamos as simulações com 3 tipos de sinais:

### 1. Sinal BPSK:

Nesta análise estabelecemos um cenário com um sinal BPSK ( Binary Phase-Shift Keying) , onde simulamos símbolos i.i.d. extraídos da constelação  $-1$  e  $+1$ .

Na simulação com o kernel Epanechnikov, foram utilizados os seguintes parâmetros:  $\sigma=5$  e  $\mu=5$ ,  $\sigma=6$  e  $\mu=45$ ,  $\sigma=7$  e  $\mu=30$ ,  $\sigma=8$  e  $\mu=200$ , e comparamos com a execução do algoritmo com kernel gaussiano, onde  $\sigma=2$  e  $\mu=5$ .

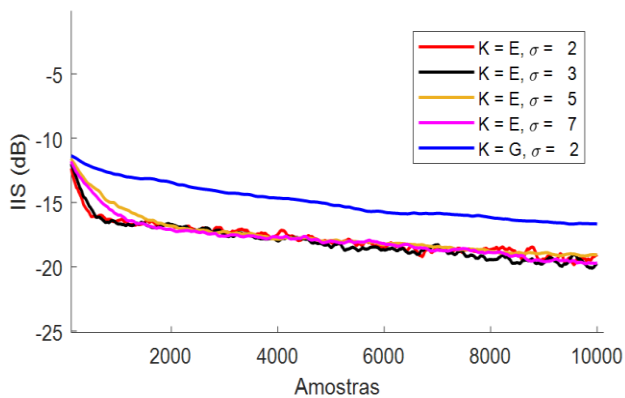


Figura 2. Simulação do algoritmo da correntropia com sinal BPSK

Ao analisarmos o resultado da simulação na figura 2, constatamos que o desempenho do algoritmo executado com o kernel Epanechnikov é melhor do que o obtido com o kernel gaussiano, visto que o algoritmo converge para um patamar de IIS residual bem menor. Podemos verificar também que, com o kernel Epanechnikov, o algoritmo apresentou uma convergência mais rápida para  $\sigma=2$  e  $3$ .

### 2. Sinal Correlacionado

Para simulação do algoritmo com sinal correlacionado, um sinal BPSK foi pré codificado por um filtro  $f = [ 1 \ 0.5 \ 0.2 ]$ , sendo a saída deste filtro o sinal transmitido.

Foram utilizados os seguintes parâmetros: com o

kernel gaussiano foi considerado  $\sigma=2$  e  $\mu=5$ , e para a simulação do sinal com o kernel Epanechnikov, foram utilizados  $\sigma=1$  e  $\mu=0.0005$ ,  $\sigma=4$  e  $\mu=1$ ,  $\sigma=5$  e  $\mu=10$ ,  $\sigma=7$  e  $\mu=30$ ,  $\sigma=10$  e  $\mu=200$ .

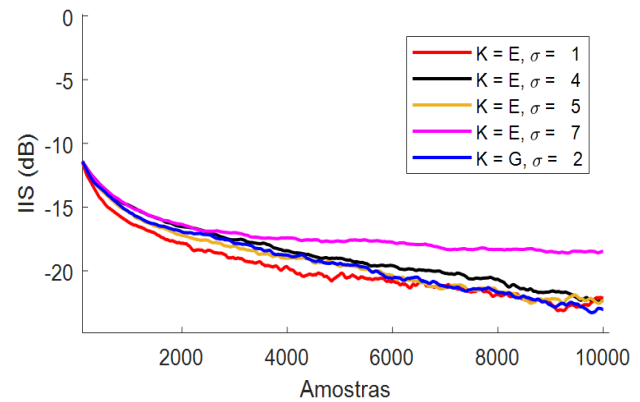


Figura 3. Simulação do algoritmo da correntropia com sinal correlacionado

Na Figura 3, observamos que considerando o kernel Epanechnikov com  $\sigma=1$ , é possível obter um patamar de IIS menor do que o obtido com o kernel gaussiano, apesar dos dois casos estabilizarem em um patamar de IIS residual similar. Com  $\sigma=5$ , o desempenho foi equivalente ao do algoritmo executado com kernel gaussiano.

### 3. Sinal com distribuição uniforme:

Em seguida consideramos a transmissão de um sinal com distribuição uniforme no intervalo de  $-1$  a  $1$ . Foram utilizados os seguintes parâmetros para o algoritmo executado com o kernel Epanechnikov:  $\sigma=2$  e  $\mu=0.5$ ,  $\sigma=3$  e  $\mu=1$ ,  $\sigma=5$  e  $\mu=30$  e  $\sigma=7$  e  $\mu=200$ , e comparamos com a execução do algoritmo com kernel gaussiano, com  $\sigma=2$  e  $\mu=0.1$ .

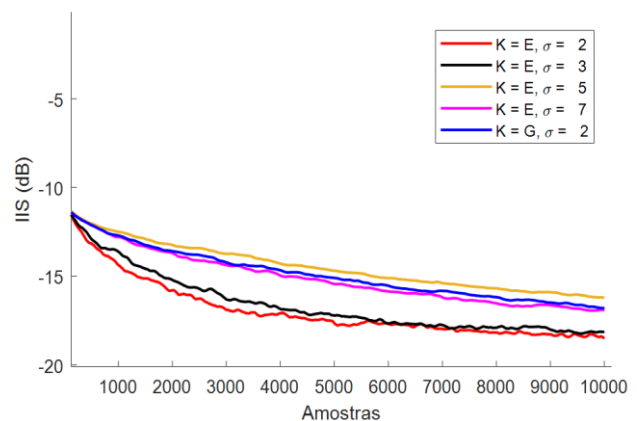


Figura 4. Simulação do algoritmo da correntropia com sinal com distribuição uniforme

Ao analisarmos a figura 4, observamos que o algoritmo da correntropia, quando executado com um sinal com distribuição uniforme e kernel Epanechnikov, convergiu melhor, obtendo uma convergência mais rápida e para patamar de IIS menor para  $\sigma=2$  e 3.

## Conclusões

Algoritmos de equalização cega baseados em ITL tem sido amplamente estudados e nos últimos anos diversos avanços vêm sendo feitos no contexto de suas aplicações e os parâmetros que impactam em sua eficiência. O ITL (Information Theoretic Learning) vem desempenhando um papel crescente no processamento de sinal adaptativo, resolvendo assim os problemas que os critérios clássicos, como o CMA[2], não conseguem resolver.

Neste trabalho avaliamos o efeito de alterar o kernel utilizado no critério da correntropia. Vimos que nos casos estudados, o uso do kernel Epanechnikov é vantajoso se comparado ao kernel gaussiano normalmente utilizado, já que o algoritmo consegue convergir mais rápido ou para patamares de IIS residuais menores.

Esta análise ainda é preliminar, sendo que pretendemos testar outros contextos como ruído impulsivo, testar outros kernels e também ampliar o estudo para outros critérios propostos dentro do contexto de ITL.

## Referências

- [1] Principe, Jose C. Information Theoretic Learning, Springer; 2010.
- [2] D. Godard, "Self-Recovering Equalization and Carrier Tracking in Two Dimensional Data Communication Systems," *IEEE Trans. Commun.* vol. COM-28, pp. 1867-1875, Nov 1980.
- [3] Santamaria,I; Puskal,P; Principe,J. Generalized Correlation Function: Definition, Properties and Application to Blind Equalization. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 54, n. 6, pp. 2187-2197, 2006.
- [4] Scott, David W. Multivariate Density Estimation and Non Parametric Methods, WILEY, 2015
- [5] Zhang,Chengyu ; Lin ,Bin; Liu ,Renjie; Wang ,Baisuo. Low Complexity Blind Equalization Based on Parzen Window Method. *IEEE*,2009
- [6] Kraszczuk, Eduardo. Análise de Critérios Baseados em Aprendizagem por Teoria da Informação Aplicada à Equalização Cega. 2013. 108 f. Tese (Mestrado em Engenharia da Informação) – Universidade Federal do ABC, Santo André, 2013.